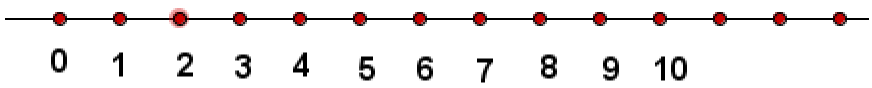
Los números naturales

Con los números naturales contamos los elementos de un conjunto (**número cardinal**). O bien expresamos la posición u orden que ocupa un elemento en un conjunto (**ordinal**).
El conjunto de los **números naturales** está formado por: N = {0,1,2,3,4,5,…..}



La suma y el producto de dos números naturales es otro número natural.

La diferencia de dos números naturales no siempre es un número natural, sólo ocurre cuando el minuendo es mayor que sustraendo.

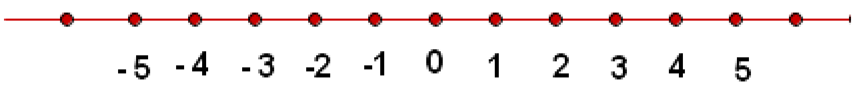
El cociente de dos números naturales no siempre es un número natural, sólo ocurre cuando la división es exacta.

Podemos utilizar potencias, ya que es la forma abreviada de escribir un producto formado por varios factores iguales.

La raíz de un número natural no siempre es un número natural, sólo ocurre cuando la raíz es exacta.

Los números enteros

Los números enteros son del tipo: Z={….,-4,-3,-2,-1,0,1,2,….}



Nos permiten expresar: el dinero adeudado, la temperatura bajo cero, las profundidades con respecto al nivel del mar, etc.

La suma, la diferencia y el producto de dos números enteros es otro número entero.

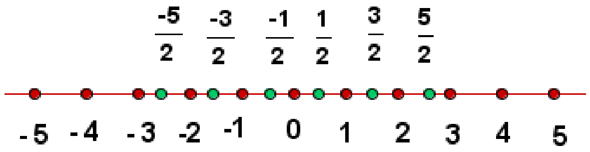
El cociente de dos números enteros no siempre es un número entero, sólo ocurre cuando la división es exacta.

Podemos operar con potencias, pero el exponente tiene que ser un número natural.

La raíz de un número entero no siempre es un número entero, sólo ocurre cuando la raíz es exacta o si se trata de una raíz de índice par con radicando positivo.

Los números racionales

Se llama número racional a todo número que puede representarse como el cociente de dos enteros, con denominador distinto de cero: $Q = \{\frac{a}{b} / a \in Z; b \in Z \ ; b \neq 0\}$



Los números irracionales

Un número es irracional si posee infinitas cifras decimales no periódicas, por lo tanto no se pueden expresar en forma de fracción.

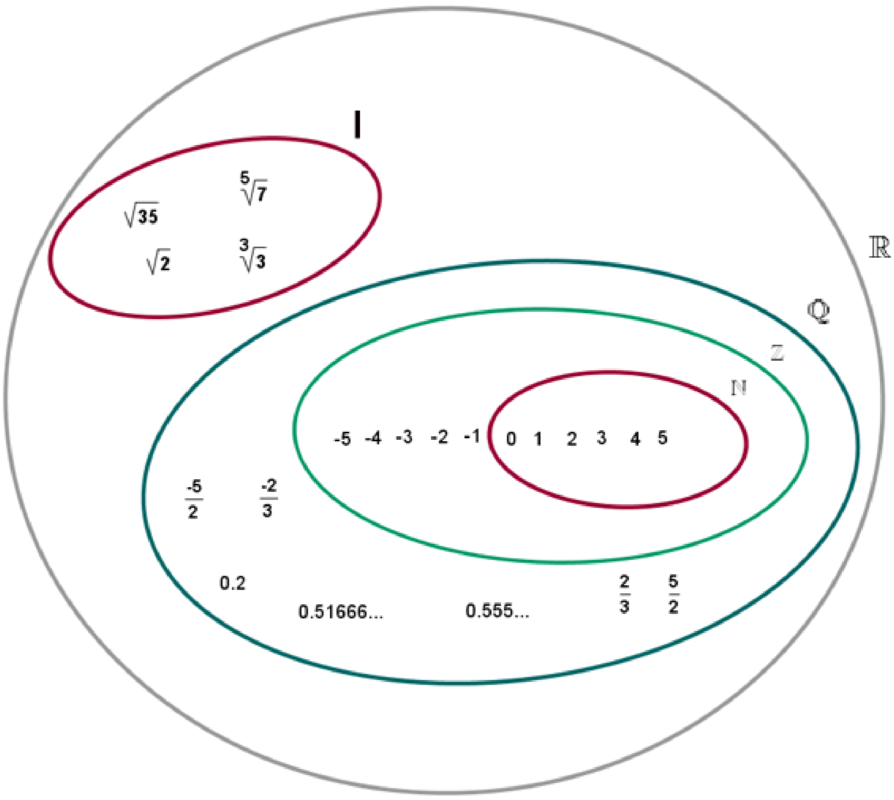
El número irracional más conocido es **π** (π= 3,141592653589…), que se define como la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

El número **e** (e = 2.718281828459...), aparece en procesos de crecimiento, en la desintegración radiactiva, en la fórmula de la catenaria, que es la curva que podemos apreciar en los tendidos eléctricos.

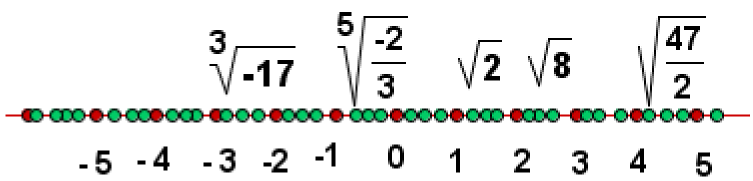
El número áureo, ϕ (ϕ=$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887\ldots$), utilizado por artistas de todas las épocas (Fidias, Leonardo da Vinci, Alberto Durero, Dalí,..) en las proporciones de sus obras.

Los números reales

El conjunto formado por los números racionales e irracionales es el conjunto de los números reales, se designa por R.



A todo número real le corresponde un punto de la recta y a todo punto de la recta un número real.

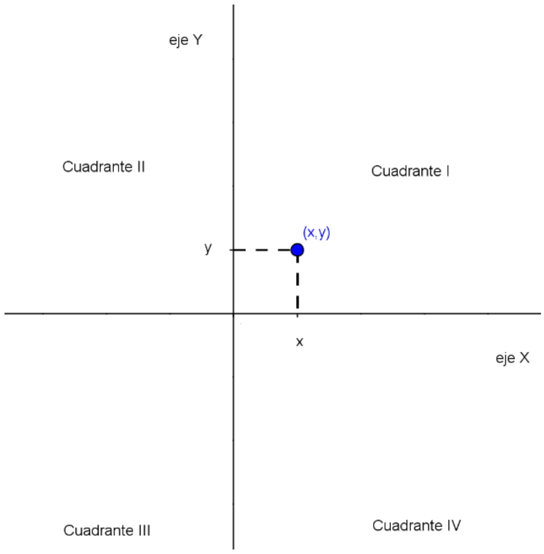


Sistema de coordenadas Cartesianas

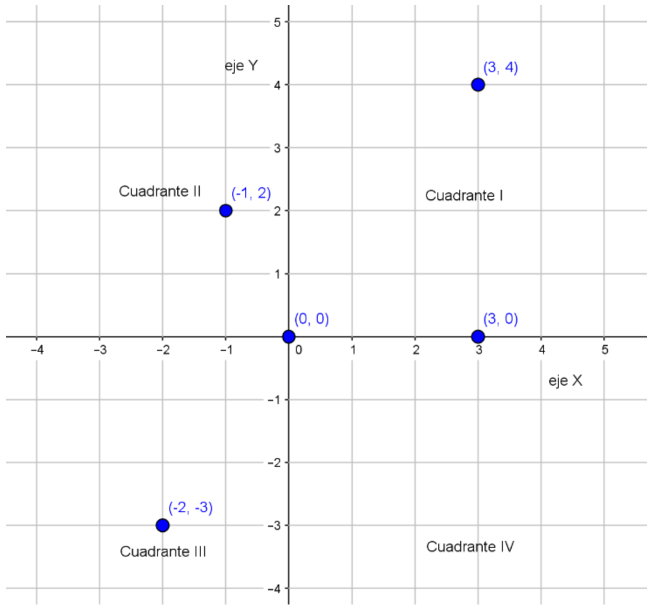
El sistema de representación más utilizado en matemática es el denominado sistema de coordenadas rectangular o plano cartesiano, en honor al matemático francés René Descartes.

Descartes, cuyo punto de partida era la desconfianza de toda fuente de conocimiento que no fuera la razón, es la racionalización del espacio. Descartes no inventa el sistema de coordenadas, pero es el primero que comprende que la sustitución de un punto del plano por un par de números constituye el caso más simple de interpretación en términos abstractos, de un dato de la intuición del espacio.

Dicho plano cartesiano está compuesto por dos rectas reales que se cortan formando ángulos rectos. Los pares ordenados de la forma (x,y) de números reales son los que identifican cada punto de dicho plano. Por convención se adopta que la primera coordenada del par, el número x, es un valor de la recta horizontal llamada "Eje x", y la segunda componente es un valor de la recta vertical llamada "Eje y". Su punto de intersección es el origen. Los dos ejes dividen el plano en cuatro cuadrantes.



"[…] El número x representa la distancia dirigida desde el eje y hasta el punto, y el número y, la distancia dirigida desde el eje x hasta el punto. Para el punto (x, y), la primera componente representa la coordenada x o la abscisa y la segunda componente, la coordenada y o la ordenada. Por ejemplo, la siguiente figura muestra las posiciones de los puntos $(-1,2);(3,4);(0,0);(3,0)$ y $(-2,-3)$ en el plano cartesiano." (Larson, 2001. Pág. 733)



Se adopta desde el origen de coordenadas hacia la derecha en el eje x y hacia arriba en el eje y el sentido positivo. A la izquierda del origen sobre el eje x y hacia abajo del origen sobre el eje y el sentido negativo.

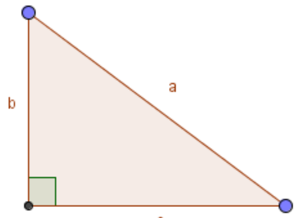
Observemos que la forma de representar un par ordenado (a,b) es análoga a la forma que utilizamos previamente para denotar un intervalo abierto. Sin embargo, esto no debería ocasionar inconvenientes dado que los contextos en los que se presenten uno u otro son bien diferenciados.

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos cualesquiera del plano cartesiano se puede hallar a partir de la relación pitagórica.

Recordemos el teorema de Pitágoras:

Sean b y c los catetos y a la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Estos están relacionados por la igualdad $a^2 = b^2 + c^2$. Recíprocamente, si $a^2 = b^2 + c^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

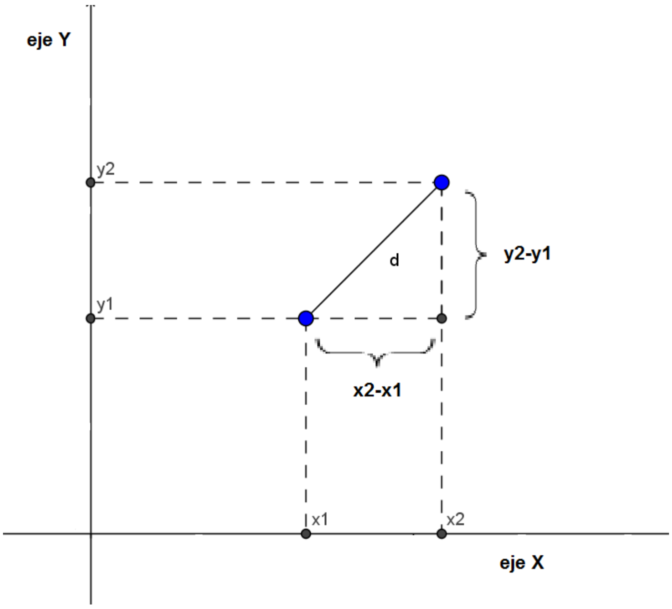


Teorema de Pitágoras

Para determinar la distancia d entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) del plano, se construye con dichos puntos un triángulo rectángulo de manera que la longitud de un cateto del triángulo es $|y_2 - y_1|$, y la otra es $|x_2 - x_1|$. Del teorema de Pitágoras, se sigue que:

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

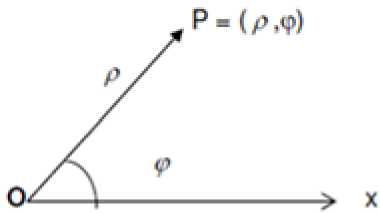
$$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$



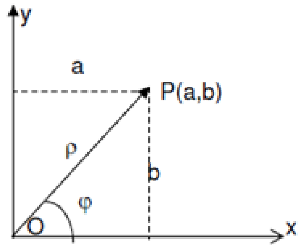
Sistemas de coordenadas Polares

Si bien el sistema de coordenadas cartesiana permite modelizar y dar respuesta a muchas situaciones, no es el único sistema utilizado en matemática.

Una forma distinta de representar puntos del plano es utilizando un sistema de coordenadas constituido por un polo O y un eje polar x, al cual se lo llama sistema polar. En este sistema, la posición de un punto queda determinada por la distancia que surge de unir dicho punto P con el polo O y el ángulo que forman la dirección positiva del eje polar con el segmento trazado desde P hasta O. La longitud del segmento $\overline{OP}$ recibe el nombre de radio vector ρ y el ángulo recibe el nombre de argumento φ.



Equivalencia entre los sistemas Cartesiano y Polar



Por las propias características con las que quedan definidos ambos sistemas, se puede determinar una equivalencia entre ellos. Dibujando los sistemas superpuestos, de forma tal que el origen coincida con el polo y el eje x con el eje polar, se puede demostrar mediante las relaciones trigonométricas y el Teorema de Pitágoras la validez de las siguientes fórmulas de transformación:

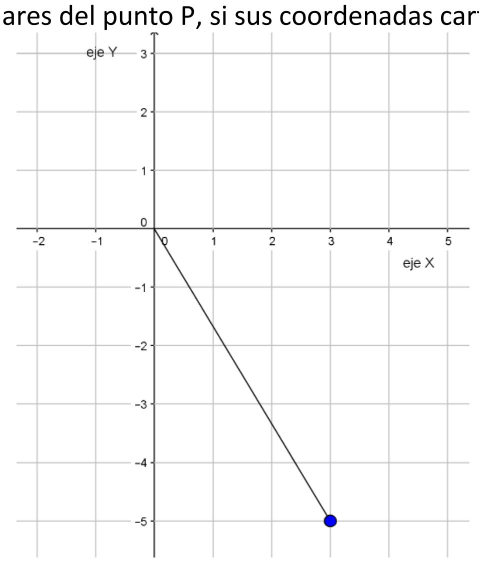
Si se conocen las coordenadas cartesianas a y b, $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, siendo su valor la longitud del segmento $\overline{OP}$.

El ángulo φ, que forma el semieje positivo de x con la dirección del segmento $\overline{OP}$ se obtiene de la relación trigonométrica $tg\varphi = \frac{b}{a}$ siendo $\varphi = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$.

Si se conocen las coordenadas polares (ρ, φ), estableciendo las correspondientes relaciones trigonométricas $\cos\varphi = \frac{a}{\rho}$ y $\operatorname{sen}\varphi = \frac{b}{\rho}$, obtenemos $a = \rho \cdot \cos\varphi$ y $b = \rho \cdot \operatorname{sen}\varphi$

Hacemos notar que, desde lo estrictamente matemático tienen la misma posición sobre el plano todos los pares ordenados de forma $(\rho, \varphi + 2k\pi)$, siendo k un número entero, pero aquí se ha tomado una única solución considerando un solo período de 0 a 2π.

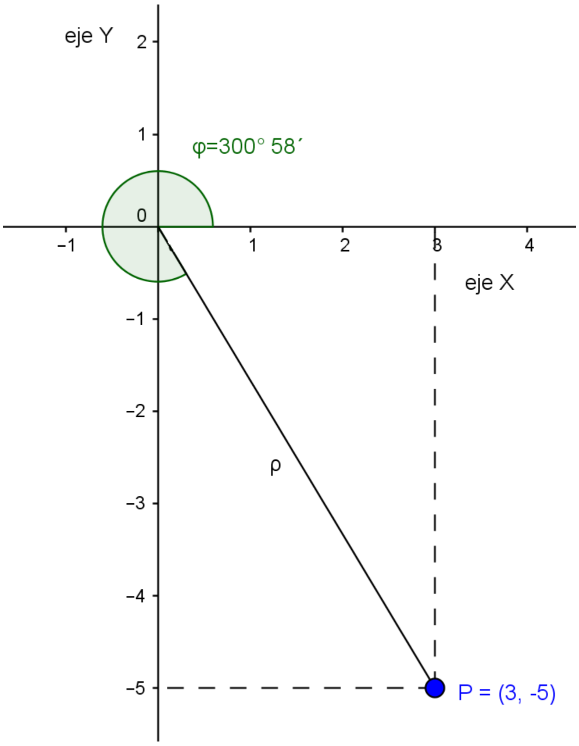
Hallaremos las coordenadas polares del punto P, si sus coordenadas cartesianas son $a = 3;\ b = -5$



$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$$

$\varphi = arctg\left(\frac{b}{a}\right) = arctg\left(-\frac{5}{3}\right)$. Por ser a positivo y b negativo, el punto estará ubicado en el cuarto cuadrante, resultando $\varphi = 300°58'$.

Entonces es punto (3;-5) en coordenadas cartesianas es equivalente a $(\sqrt{34};300^0 58')$ en coordenadas polares.

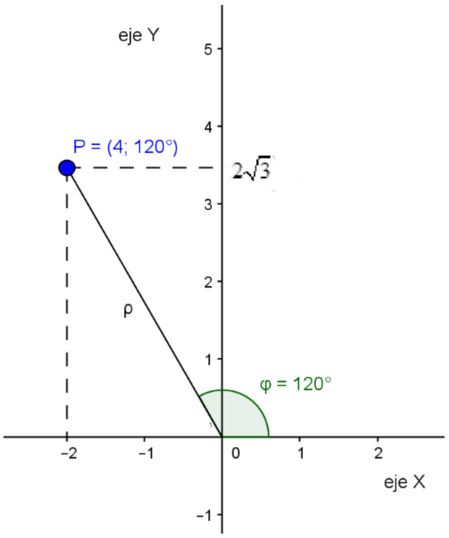


Hallaremos las coordenadas cartesianas del punto P cuyas coordenadas polares son $(4,120°)$

$$a = \rho \cdot \cos\varphi = 4\cos 120° = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$b = \rho \cdot \operatorname{sen}\varphi = 4\operatorname{sen}120° = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

en consecuencia las coordenadas cartesianas de P son $\left(-2,2\sqrt{3}\right)$.



Para complementar la lectura de esta breve teoría se sugiere ver en Youtube los siguientes videos explicativos:

- Conjuntos numéricos: https://youtu.be/ncQkduXPwuY
- Coordenadas: https://youtu.be/1DgIrA5Poiw

Bibliografía obligatoria y recomendada:

- Armando Rojo: Álgebra I y II
- Hector Di Caro: Álgebra y Geometría Analítica.
- Sagastume Berra, G. Fernández: Álgebra y Cálculo Numérico.
- Lentin, Rivaud: Álgebra Moderna
- Donato Di Pietro: Geometría Analítica.
- Ch. H. Lehmann Geometría Analítica.
- Louis Leithold El Cálculo con Geometría
- P. Smith, A. Gale Elementos de G. Analítica