INTRODUCCIÓN

UNA COMIDA GRATIS

Diez jóvenes decidieron celebrar la terminación de sus estudios en la escuela secundaria con un almuerzo en un restaurante. Una vez reunidos, se entabló entre ellos una discusión sobre el orden en que habían de sentarse a la mesa. Unos propusieron que la colocación fuera por orden alfabético; otros, con arreglo a la edad; otros, por los resultados de los exámenes; otros, por la estatura, etc. La discusión se prolongaba, la sopa se enfrió y nadie se sentaba a la mesa. Los reconcilió el camarero, dirigiéndoles las siguientes palabras:

- Jóvenes amigos, dejen de discutir. Siéntense a la mesa en cualquier orden y escúchenme

Todos se sentaron sin seguir un orden determinado. El camarero continuó:

- Que uno cualquiera anote el orden en que están sentados ahora. Mañana vienen a comer y se sientan en otro orden. Pasado mañana vienen de nuevo a comer y se sientan en orden distinto, y así sucesivamente hasta que hayan probado todas las combinaciones posibles. Cuando llegue el día en que ustedes tengan que sentarse de nuevo en la misma forma que ahora, les prometo solemnemente, que en lo sucesivo les convidaré a comer gratis diariamente, sirviéndoles los platos más exquisitos y escogidos.

La proposición agradó a todos y fue aceptada. Acordaron reunirse cada día en aquel restaurante y probar todos los modos distintos, posibles, de colocación alrededor de la mesa, con el objeto de disfrutar cuanto antes de las comidas gratuitas.

Sin embargo, no lograron llegar hasta ese día. Y no porque el camarero no cumpliera su palabra sino porque el número total de combinaciones diferentes alrededor de la mesa es extraordinariamente grande. Éstas son exactamente 3628800. Es fácil calcular, que este número de días son casi 10000 años.

PRINCIPIOS BÁSICOS DE CONTEO

A menudo nos encontramos con preguntas del tipo ¿Qué proporción de...? ¿Cuál es la probabilidad de...? ¿De cuántas maneras se puede...?

Muchas veces, para responder, se necesita un pensamiento sistemático y un poco de información adicional; por ejemplo, ¿Cuántas rutas diferentes puedo usar para ir de Buenos Aires a San Luis? o ¿De cuántas maneras pueden quedar los 3 primeros puestos en una carrera de 6 caballos?

Hay técnicas y principios matemáticos útiles en situaciones variadas, pero muchas preguntas se pueden responder directamente, contando en forma sistemática, es decir, listando todos los posibles resultados en un orden, para luego contar cuántos son, o desarrollando reglas de conteo.

Principio de Adición

Cinco empresas de transporte terrestre tienen servicio diario entre Ushuaia y Jujuy. Tres empresas de aviación tienen vuelo diario entre Ushuaia y Jujuy. En consecuencia, hay 5+3 maneras de ir de Ushuaia a Jujuy en avión o en autobús.

En los problemas de conteo, la palabra "o" se traduce en suma.

El principio general es: “**Si dos operaciones son mutuamente excluyentes (es decir, si sólo una de ellas puede ocurrir) y si la primera se puede hacer de *n* maneras diferentes y la segunda operación se puede hacer de *m* maneras diferentes, entonces hay *n + m* maneras de realizar la primera o la segunda operación.”**

Principio de Multiplicación.

“**Si una operación se puede hacer de *n* maneras diferentes y si en cada caso, una segunda operación se puede hacer de *m* maneras diferentes, entonces hay *m.n* (m por n) maneras de realizar las dos operaciones”**

El menú de un restaurante ofrece 3 platos calientes y 4 postres. ¿De cuántas maneras se puede elegir un almuerzo de 1 plato caliente y 1 postre?

Podríamos hacer una lista de todas las posibilidades, pero será mucho más cómodo aplicar el principio de la multiplicación:

Hay 3 maneras de elegir el plato caliente y para cada una de ellas hay 4 maneras de elegir el postre. Por lo tanto, hay 3.4 =12 comidas posibles.

VARIACIONES – PERMUTACIONES - COMBINACIONES

Con frecuencia cada uno de los pasos en que se divide un proceso de recuento puede interpretarse como una elección o **selección** de ***k*** **objetos** elegidos entre los elementos de un conjunto de ***n*** **objetos.**

Dado un conjunto de “*n*” elementos puede ocurrir:

1. Que los elementos sean distintos; en este caso, a los grupos se les denomina **agrupaciones simples.**
2. Que algunos elementos sean iguales; en este caso, a los grupos se les denomina **agrupaciones con repetición**.

Considerando la naturaleza de los elementos (que sean iguales o distintos), las *agrupaciones* recibirán el nombre de *permutaciones o combinaciones simples* cuando no se repite ningún elemento y *permutaciones o combinaciones con repetición* cuando algún elemento se repite**.**

Definición de factorial. Para un entero n ≥ 1, *n factorial*, expresado *n!*, se define por:

$$n! = (n)\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

¿Y cuál es el factorial de cero? El factorial de cero se define como: 0! = 1

VARIACIONES

Se llama *variaciónes simples de n elementos tomados de a k* ($k < n$) a los distintos grupos formados por k elementos de forma que:

- Los k elementos que forman el grupo son distintos (no se repiten)
- Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden en que están colocados (influye el orden).
- Aquí, no se utilizan todos los elementos.

Si elegimos un primer elemento, lo podemos hacer de n formas. Quitamos el elemento elegido y elegimos otro de entre los n-1 que quedan. Esto podrá hacerse de n-1 formas. Quitamos también este elemento y nos quedamos con n-2, de entre los que elegimos el tercero. Esto lo podremos hacer de n-2 formas... Según la regla del producto, las maneras de escoger k elementos de entre un total de n según un determinado orden, será igual al producto de: $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$

Notación. $V_{n,k}$ denota el número de permutaciones de n elementos distintos tomados de a k.

Para llegar a una versión simplificada se opera así:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(k-1))\bullet\frac{(\mathrm{n}-k)(\mathrm{n}-(k+1))\ldots(3)(2)(1)}{(\mathrm{n}-k)(\mathrm{n}-(k+1))\ldots(3)(2)(1)}=\frac{n!}{(n-k)!}=V_{n,k}$$

Ejemplo $V_{10,4}$ son las permutaciones de 10 elementos agrupándolos en subgrupos de 4 elementos:

$$V_{10,4}=\frac{10!}{(10-4)!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=5040$$

Entonces podemos formar 5040 subgrupos diferentes de 4 elementos a partir de los 10 elementos.

Ejemplo ¿Cuántas banderas diferentes, de tres franjas horizontales de igual ancho y de colores distintos, pueden confeccionarse a partir de siete colores diferentes?

Solución:

$$V_{7,3}=\frac{7!}{4!}=210$$

Ejemplo 3. ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con las nueve cifras significativas del sistema decimal?

Al tratarse de números el orden importa y además nos dice "cifras distintas" luego no pueden repetirse:

$$V_{9,3}=9\cdot8\cdot7=504$$

Por tanto, se pueden formar 504 números.

En el caso especial en que $n = k$, se llama ***permutaciones de n.***

PERMUTACIONES

Se llaman *permutaciones de n* elementos a las diferentes agrupaciones de esos *n* elementos de forma que:

- En cada grupo intervienen los *n* elementos sin repetirse ninguno (intervienen todos los elementos).
- Dos grupos son diferentes si el orden de colocación de alguno de esos *n* elementos es distinto (influye el orden).

Notación: P_n denota el número de permutaciones de *n* elementos distintos.

$$P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

P_{10} son las permutaciones de 10 elementos:

$$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$$

Es decir, tendríamos 3628800 formas diferentes de agrupar 10 elementos.

Una madre (yo) tiene 4 hijos ¿de cuántas maneras distintas, nombrándolos uno por uno, puede llamarlos a cenar?

Solución: $P_4 = 4! = 24$

Gonzalo	*Ignacio*	*Adolfina*	*Renata*
Gonzalo	*Ignacio*	*Renata*	*Adolfina*
Gonzalo	*Adolfina*	*Renata*	*Ignacio*
Gonzalo	*Adolfina*	*Ignacio*	*Renata*
Gonzalo	Renata	*Ignacio*	*Adolfina*
Gonzalo	Renata	*Adolfina*	*Ignacio*
Ignacio	Gonzalo	*Adolfina*	*Renata*
Ignacio	*Gonzalo*	*Renata*	*Adolfina*
Ignacio	*Adolfina*	*Gonzalo*	*Renata*
Ignacio	*Adolfina*	*Renata*	*Gonzalo*
Ignacio	*Renata*	*Adolfina*	*Gonzalo*
Ignacio	*Renata*	*Gonzalo*	*Adolfina*
Adolfina	*Ignacio*	*Gonzalo*	*Renata*
Adolfina	*Ignacio*	*Renata*	*Gonzalo*
Adolfina	*Renata*	*Gonzalo*	*Ignacio*
Adolfina	*Renata*	*Ignacio*	*Gonzalo*

Adolfina	*Gonzalo*	*Ignacio*	*Renata*
Adolfina	*Gonzalo*	*Renata*	*Ignacio*
Renata	*Gonzalo*	*Ignacio*	*Adolfina*
Renata	*Gonzalo*	*Adolfina*	*Ignacio*
Renata	*Ignacio*	*Gonzalo*	*Adolfina*
Renata	*Ignacio*	*Adolfina*	*Gonzalo*
Renata	*Adolfina*	*Gonzalo*	*Ignacio*
Renata	*Adolfina*	*Ignacio*	*Gonzalo*

COMBINACIONES

EL ORDEN NO IMPORTA

Tomamos las $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ posibilidades y las partimos en clases, de forma que en cada clase estén aquellas elecciones que sean la misma salvo el orden.

Se eligen k elementos, la forma de ordenarlos será k! y, así, en cada clase tendré exactamente k! casos.

Por tanto, el número de clases, es decir, el número de posibilidades de escoger k elementos sin importar el orden y sin repetir será

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Este número suele conocerse como el número de combinaciones de *n* elementos tomadas de a *k* y se denota por:

$$C_{n.k}=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Se llama *combinaciones de n elementos tomados de a k* ($k \leq n$) a todas las clases posibles que pueden hacerse con los *n* elementos de forma que:

- Cada agrupación está formada por *n* elementos distintos entre sí
- Dos agrupaciones distintas se diferencian al menos en un elemento, sin tener en cuenta el orden.

Ejemplo. Un alumno decide rendir tres de los cinco exámenes finales ¿De cuántas maneras distintas puede elegir esas tres pruebas?

$$C_{5,3}=\frac{5!}{3!\times 2!}=10$$

Ejemplo ¿Cuántas combinaciones de 6 aciertos existen en la lotería primitiva?

$$C_{49,6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = 13983816$$

Es decir, que tendríamos que invertir el costo de 13983816 de apuestas para tener la seguridad al 100% de ganar.

Números combinatorios

El número combinatorio de m elementos tomados de a n, o sea $C_{m,n}$, se representa $\binom{m}{n}$

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Propiedades

1. $\binom{m}{m} = 1$

$$\binom{m}{m} = \frac{m!}{m!\,(m-m)!} = \frac{m!}{m!} = 1$$

2. $\binom{m}{1} = m$

$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{1!\,(m-1)!} = \frac{m.\,(m-1)!}{1!\,(m-1)!} = m$$

3. $\binom{m}{0} = 1$

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0!\,(m-0)!} = \frac{m!}{1(m)!} = 1$$

4. $\binom{m}{m-1} = m$

$$\binom{m}{m-1} = \frac{m!}{(m-1)!\,(m-(m-1))!} = \frac{m.\,(m-1)!}{(m-1)!} = m$$

5. $\binom{m}{i} = \binom{m}{m-i}$

$$\frac{m!}{i!(m-i)!} = \frac{m!}{(m-i)![m-(m-i)]!}$$

$$\frac{m!}{i!\cdot(m-i)!} = \frac{m!}{(m-i)!i!}$$

6. $\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i}=\binom{n}{i}$

$$\frac{(n-1)!}{(i-1)!\cdot[(n-1)-(i-1)]!}+\frac{(n-1)!}{i!\cdot(n-1-i)!}=\frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}$$

$$\frac{(n-1)!}{(i-1)!\cdot[n-i]!}+\frac{(n-1)!}{i!\cdot(n-i-1)!}=\frac{n!}{i!(\cdot n-i)!}$$

$$\frac{i\cdot(n-1)!}{i\cdot(i-1)!\cdot[n-i]!}+\frac{(n-i)\cdot(n-1)!}{i!\cdot(n-i)\cdot(n-i-1)!}=\frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}$$

$$\frac{i\cdot(n-1)!}{i!\cdot(n-i)!}+\frac{(n-i)\cdot(n-1)!}{i!\cdot(n-i)!}=\frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}$$

$$\frac{i\cdot(n-1)!+(n-i)\cdot(n-1)!}{i!\cdot(n-i)!}=\frac{n!}{i!\cdot(n-i)!};$$

$$\frac{(n-1)!\cdot(i+n-i)}{i!\cdot(n-i)!}=\frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}$$

$$\frac{(n-1)!\cdot(n)}{i!\cdot(n-i)!}=\frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}$$

Binomio de Newton

De la última propiedad de los números combinatorios $\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i}=\binom{n}{i}$ permite generar números combinatorios a partir de dos de ellos.

$\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=\binom{2}{1}$

$\binom{2}{0}+\binom{2}{1}=\binom{3}{1}$

$\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=\binom{3}{2}$

$\binom{3}{0}+\binom{3}{1}=\binom{4}{1}$: etc

Estos números combinatorios pueden ser colocados en una configuración triangular, llamada triángulo de Tartaglia.

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Algunas propiedades del triángulo de Tartaglia son:

- En cualquier fila, los números que equidistan de los extremos son iguales
- Los extremos de cualquier fila son iguales a 1.
- Cualquier número de una fila, con excepción de los extremos, es igual a la suma de los dos números que tiene encima, pertenecientes a la fila anterior (tomadas las filas de arriba hacia abajo)
- La suma de los números de una fila k es igual a 2^k

La potencia $(x+y)^n$ puede expresarse así:

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{\boldsymbol{n}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{0}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{0}} + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n-1}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{1}} + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n-2}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{2}} + \cdots + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{0}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$$

Obsérvese que los coeficientes del desarrollo son números combinatorios. El primer coeficiente es $\binom{n}{0} = 1$ y el último es, $\binom{n}{n} = 1$

En el desarrollo de $(x+y)^n$, los exponentes de x son descendentes y son iguales en cada término, a la diferencia entre el índice y el orden del número combinatorio correspondiente a ese término. Los exponentes de y, en cambio, son ascendentes y son iguales al orden del número combinatorio que corresponde al término considerado.

El desarrollo $(x + y)^n$contiene n+1 términos

El término k-ésimo T_k del desarrollo de $(x + y)^n$, con k $\leq$ n+1, se obtiene con la siguiente expresión:

$$T_k = \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^{k-1}$$

Para complementar la lectura de esta breve teoría se sugiere ver en Youtube los siguientes videos explicativos:

- https://www.youtube.com/watch?v=0oN5B0EXUcw
- https://www.youtube.com/watch?v=ynxsVxVZ9Vw
- https://www.youtube.com/watch?v=5Lo96M1yTEM
- https://www.youtube.com/watch?v=vyCREOt-i-E

Bibliografía obligatoria y recomendada:

- Armando Rojo: Álgebra I y II
- Hector Di Caro: Álgebra y Geometría Analítica.
- Sagastume Berra, G. Fernández: Álgebra y Cálculo Numérico.
- Lentin, Rivaud: Álgebra Moderna
- Donato Di Pietro: Geometría Analítica.
- Ch. H. Lehmann Geometría Analítica.
- Louis Leithold El Cálculo con Geometría
- P. Smith, A. Gale Elementos de G. Analítica