El conjunto de los **números complejos** se designa con la letra mayúscula C.

C={(a,b)/a∈R ^b∈R}

La unidad imaginaria: **Se llama así al número $\sqrt{-1}$ y se designa por la letra *i*.**

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4}.\sqrt{-1} = 2i$$

Números imaginarios

Un **número imaginario** se denota por **b***i*, donde **b** es un número real, e *i* es la unidad imaginaria. Con los **números imaginarios** podemos calcular raíces con índice par y radicando negativo.

$$x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 = -9$$

$$x^2 = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$$

Potencias de la unidad imaginaria

$i^0 = 1$ $\qquad$ $i^1 = i$ $\qquad$ $i^2 = -1$ $\qquad$ $i^3 = -i$

Los valores se repiten de cuatro en cuatro, por eso, para saber cuánto vale una determinada potencia de *i*, se divide el exponente entre 4, y el resto es el exponente de la potencia equivalente a la dada.

i^{22}

$$\begin{array}{r|l} 22 & 4 \\ \hline 2 & 5 \end{array}$$

$i^{22} = (i^4)^5 \cdot i^2 = -1$

Formas de escritura de un número complejo

Números complejos en forma de par ordenado: (a,b), par porque son 2 elementos, y ordenado porque la primera componente hace referencia a la parte real y la segunda a la parte imaginaria del número.

Números complejos en forma binómica: a + bi

El número **a** se llama **parte real** del **número complejo**.

El número **b** se llama **parte imaginaria** del **número complejo**.

Si b = 0 el **número complejo** se reduce a un **número real** ya que a + 0*i* = a.

Si a = 0 el **número complejo** se reduce a ***bi***, y se dice que es un **número imaginario puro**.

Los **números complejos a + b*i*** y **–a – b*i*** se llaman **opuestos**.

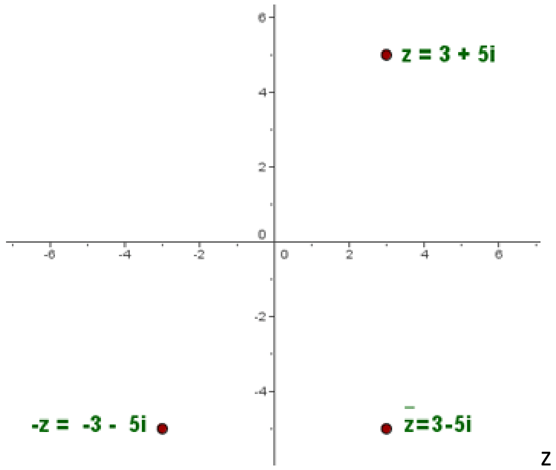
Los **números complejos z = a + b*i*** y **z = a – b*i*** se llaman **conjugados**.

Dos **números complejos** son **iguales** cuando tienen **la misma componente real y la misma componente imaginaria.**

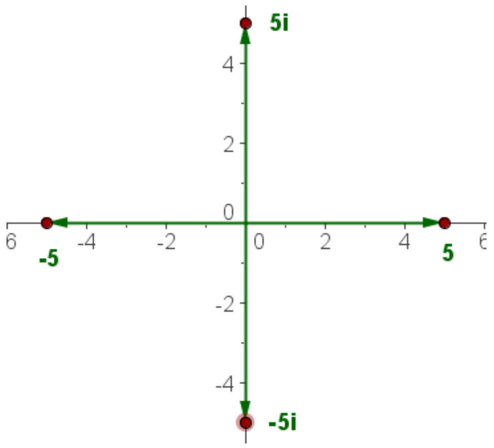
Representación gráfica de números complejos

Los **números complejos** se representan en ejes cartesianos. El **eje X** se llama **eje real** y el **Y**, **eje imaginario**. **El número complejo a + b*i*** se representa:

Por el punto **(a,b)**, que recibe el nombre de **afijo**,



Los afijos de los **números reales** se sitúan sobre el eje real, **X**. Y **los imaginarios** sobre el eje imaginario, **Y**.



Operaciones con números complejos en la forma binómica

Suma algebraica de números complejos

La suma algebraica de números complejos se realiza **sumando y/o restando partes reales entre sí y partes imaginarias entre sí.**

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ $\qquad$ $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

$(5 + 2i) + (-8 + 3i) - (4 - 2i) = (5 - 8 - 4) + (2 + 3 + 2)i = -7 + 7i$

Producto de números complejos

El producto de los números complejos se realiza aplicando la propiedad **distributiva** y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$(5 + 2i) \cdot (2 - 3i) = 10 - 15i + 4i - 6i^2 = 10 - 11i + 6 = 16 - 11i$

Cociente de números complejos

El cociente de números complejos se resuelve multiplicando numerador y denominador por el conjugado de éste. El objetivo es eliminar la i del denominador (análogo procedimiento al de racionalización)

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$$\frac{3+2i}{1-2i} = \frac{(3+2i)\cdot(1+2i)}{(1-2i)\cdot(1+2i)} = \frac{3+6i+2i+4i^2}{1-(2i)^2} = \frac{3+8i-4}{1+4} = -\frac{1}{5} + \frac{8}{5}i$$

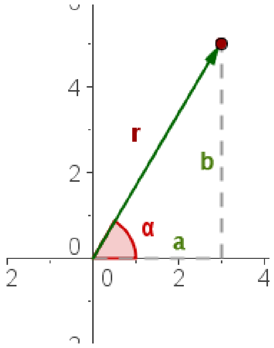
Números complejos en forma polar

Módulo de un número complejo

El módulo de un número complejo es la distancia determinada por el origen de coordenadas y su afijo. Se designa por **|z|**.

$$z = a + bi$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Argumento de un número complejo

El argumento de un número complejo es el ángulo que forma el módulo del complejo con el eje real. Se designa por **arg(z)**.

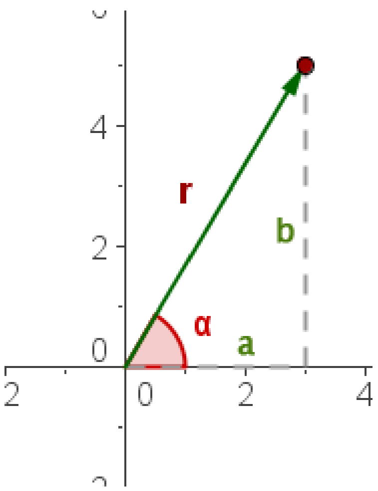
$$\alpha = arctg\,\frac{b}{a} \rightarrow \begin{cases} \frac{+b}{+a} = \alpha & \frac{+b}{-a} = 180º - \alpha \\ \frac{-b}{-a} = 180º + \alpha & \frac{-b}{+a} = 360º - \alpha \end{cases}$$

Expresión de un número complejo en forma polar. $z = r_\alpha$

Números complejos en forma trigonométrica.

A partir de la forma polar es muy fácil pasar a una nueva forma denominada trigonométrica.

a + b*i* = r_α = r (cos α + *i* sen α)



Binómica	z = a + b*i*
Polar	$z = r_\alpha$
trigonométrica	z = r (cos α + *i* sen α)

$a = r \cdot \cos\alpha$ $\qquad$ $b = r \cdot \mathrm{sen}\alpha$

Ejemplos: Pasar a la forma polar y trigonométrica**:**

Ejemplo 1:

$z = 1 + \sqrt{3}\,i$

$|z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

$\alpha = \text{arc tg}\ \frac{+\sqrt{3}}{+1} = 60^{o}$

z = $2_{60º}$ = 2(cos 60º + i sen 60º)

Ejemplo 2:

$z = -1 + \sqrt{3}\,i$

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

$\alpha = \text{arc tg}\ \frac{+\sqrt{3}}{-1} = 120^{o}$

z = $2_{120º}$=2(cos 120º + i sen 120º)

Ejemplo 3:

$z = -1 - \sqrt{3}\,i$

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$

$\alpha = \text{arc tg}\ \frac{-\sqrt{3}}{-1} = 240^{o}$

z = $2_{240º}$

z=2(cos 240º + i sen 240º)

Ejemplo 4:

$z = 1 - \sqrt{3}\,i$

$|z| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$

$\alpha = \text{arc tg}\ \frac{-\sqrt{3}}{+1} = 300^{o}$

z = $2_{300º}$

z=2(cos 300º + i sen 300º)

Pasar a la forma binómica:

z = $2_{120º}$

Para pasar de la forma polar a la binómica, tenemos que pasar en primer lugar a la forma trigonométrica

r_α = r (cos α + *i* sen α)

z = 2 · (cos 120º + *i* sen 120º)

$$a = 2 \cdot \cos 120^{\circ} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$b = 2 \cdot \operatorname{sen} 120^{\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = -1 + \sqrt{3}\, i$$

Producto y cociente de complejos en forma polar

La **multiplicación** de dos **números complejos** es otro **número complejo** tal que:

Su módulo es el producto de los módulos. Su argumento es la suma de los argumentos.

$$r_{\alpha} \cdot r'_{\beta} = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$$

$$6_{45^{\circ}} \cdot 3_{15^{\circ}} = 18_{60^{\circ}}$$

La **división** de dos **números complejos** es otro **número complejo** tal que:

Su módulo es el cociente de los módulos. Su argumento es la diferencia de los argumentos.

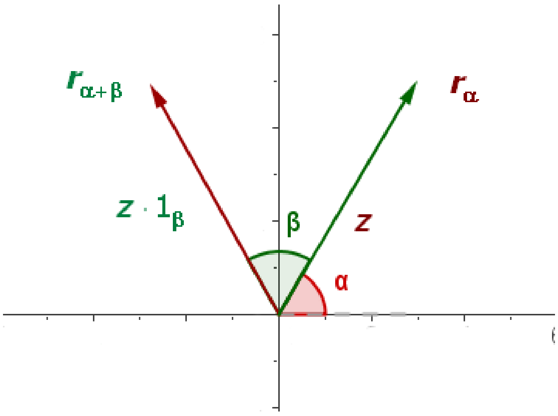
$$\frac{r_{\alpha}}{r'_{\beta}} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}$$

$$6_{45^{\circ}} : 3_{15^{\circ}} = 2_{30^{\circ}}$$

Interpretación geométrica del producto de números complejos.

Al multiplicar un número complejo $z = r_{\alpha}$ por 1_{β} se gira z un ángulo β alrededor del origen.

$r_{\alpha} \cdot 1_{\beta} = r_{\alpha+\beta}$



Potencia de número complejo

La **potencia n-ésima** de **número complejo** es otro **número complejo** tal que:

Su módulo es la potencia n-ésima del módulo. Su argumento es n veces el argumento dado.

$$(r_\alpha)^n = (r)^n_{n\cdot\alpha}$$

$$(2_{30°})^4 = 16_{120°}$$

Esta operación conviene hacerla siempre en forma polar.

A partir del modo de cálculo de las potencias de números complejos se obtiene la **Fórmula de Moivre**

$$[r(\cos\alpha + i\ sen\ \alpha)]^n = r^n \cdot (\cos n\alpha + i\ sen\ n\alpha)$$

Raíz de números complejos

$$\sqrt[n]{r_\alpha}$$

La **raíz enésima** de **número complejo** es otro **número complejo** tal que:

Su módulo es la raíz enésima del módulo.

$$r' = \sqrt[n]{r}$$

Su argumento es:

$$\alpha' = \frac{\alpha + 2\pi k}{n}$$

k = 0,1 ,2 ,3, … (n-1)

Al igual que las potencias, las raíces conviene que se hagan expresando el número complejo en forma polar.

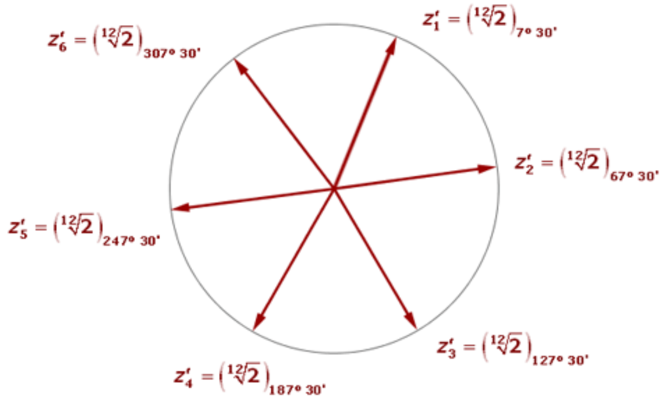
$$\sqrt[6]{1+i}$$

$$z = 1 + i \qquad |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad \alpha = arc\ tg\ \frac{+1}{+1} = 45^o \qquad z = \left(\sqrt{2}\right)_{45^\circ}$$

$$\sqrt[6]{\left(\sqrt{2}\right)_{45^\circ}}$$

$$|z'| = \sqrt[6]{\left(\sqrt{2}\right)} = \sqrt[12]{2}$$

$$\alpha = \frac{45^o + 360^o k}{6} \begin{cases} k=0 & \alpha_1 = 7^o\ 30' & z'_1 = \left(\sqrt[12]{2}\right)_{7^\circ 30'} \\ k=1 & \alpha_2 = 67^o\ 30' & z'_2 = \left(\sqrt[12]{2}\right)_{67^\circ 30'} \\ k=2 & \alpha_3 = 127^o\ 30' & z'_3 = \left(\sqrt[12]{2}\right)_{127^\circ 30'} \\ k=3 & \alpha_4 = 187^o\ 30' & z'_4 = \left(\sqrt[12]{2}\right)_{187^\circ 30'} \\ k=4 & \alpha_5 = 247^o\ 30' & z'_5 = \left(\sqrt[12]{2}\right)_{247^\circ 30'} \\ k=5 & \alpha_6 = 307^o\ 30' & z'_6 = \left(\sqrt[12]{2}\right)_{307^\circ 30'} \end{cases}$$



Para complementar la lectura de esta breve teoría se sugiere ver en Youtube los siguientes videos explicativos:

- https://youtu.be/VIvjiSuB7Mo
- https://youtu.be/3OcUtgPobNA
- https://youtu.be/4bid1cw676Q
- https://youtu.be/XxV8SYFES-c
- https://youtu.be/BGKRzMRR_yQ
- https://youtu.be/YQuDN2MUKkk
- https://youtu.be/IK1SaP8uvVM
- https://youtu.be/QNmzekX20tY

Bibliografía obligatoria y recomendada:

- Armando Rojo: Álgebra I y II
- Hector Di Caro: Álgebra y Geometría Analítica.
- Sagastume Berra, G. Fernández: Álgebra y Cálculo Numérico.
- Lentin, Rivaud: Álgebra Moderna
- Donato Di Pietro: Geometría Analítica.
- Ch. H. Lehmann Geometría Analítica.
- Louis Leithold El Cálculo con Geometría
- P. Smith, A. Gale Elementos de G. Analítica