

Espacios Vectoriales

1.- La intersección de dos subespacios es un subespacio vectorial

Si S_1 y S_2 son dos subespacios vectoriales incluidos en un espacio vectorial V , $S = S_1 \cap S_2$ está formado por todos los vectores \mathbf{u} pertenecientes a V tales que \mathbf{u} pertenece a S_1 y simultáneamente \mathbf{u} pertenece a S_2 . Para probar que efectivamente $S = S_1 \cap S_2$ es un subespacio vectorial de V debe cumplirse:

a.- Que S no sea vacío

Esto es cierto por cuanto al ser S_1 y S_2 subespacios, siempre el vector nulo ($\mathbf{0}$) pertenece a ambos, por lo que la intersección de S_1 y S_2 siempre cuenta por lo menos con un elemento: el mencionado vector nulo.

b.- Que sea cerrado para la suma

Consideremos un vector \mathbf{u} que pertenece a $S_1 \cap S_2$ y un vector \mathbf{v} que pertenece a $S_1 \cap S_2$.

Debemos probar que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ pertenece a $S_1 \cap S_2$.

Si \mathbf{u} pertenece a $S_1 \cap S_2$ entonces \mathbf{u} pertenece a S_1 y a la vez \mathbf{u} pertenece a S_2 , por definición de intersección de subespacios.

Del mismo modo, si \mathbf{v} pertenece a $S_1 \cap S_2$ entonces \mathbf{v} pertenece a S_1 y a la vez \mathbf{v} pertenece a S_2 , por similar razón.

Como S_1 es un subespacio vectorial de V , si \mathbf{u} pertenece a S_1 y \mathbf{v} también pertenece a S_1 , su suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ pertenecerá a S_1 , por cuanto al ser S_1 subespacio como hemos mencionado, es cerrado para la suma (1)

Análogamente, como S_2 es un subespacio vectorial de V , si \mathbf{u} pertenece a S_2 y \mathbf{v} también pertenece a S_2 , su suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ pertenecerá a S_2 , por cuanto al ser S_2 subespacio, es cerrado para la suma (2)

Considerando lo expuesto en (1) y (2), resulta que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ pertenece tanto a S_1 como a S_2 , lo que por definición de intersección, pertenece a $S_1 \cap S_2$. Con ello probamos que es cerrado para la suma.

c.- Que sea cerrado para el producto por un escalar

Consideremos un vector \mathbf{u} que pertenece a $S_1 \cap S_2$ y un escalar α que pertenece al cuerpo de los números reales (\mathbf{R}).

Debemos probar que $\alpha\mathbf{u}$ pertenece a $S_1 \cap S_2$.

Si \mathbf{u} pertenece a $S_1 \cap S_2$, entonces \mathbf{u} pertenece tanto a S_1 como a S_2 , por definición de intersección de subespacios.

Si \mathbf{u} pertenece a S_1 , $\alpha\mathbf{u}$ también pertenece a S_1 , por cuanto éste es subespacio vectorial y es cerrado para el producto por un escalar. (3)

Análogamente, si \mathbf{u} pertenece a S_2 , $\alpha\mathbf{u}$ también pertenece a S_2 , por cuanto éste también es subespacio vectorial y es cerrado para el producto por un escalar. (4)

De lo expuesto en (3) y (4) resulta que $\alpha\mathbf{u}$ pertenece simultáneamente a S_1 y a S_2 , por lo cual pertenece a $S_1 \cap S_2$ por definición de intersección de subespacios, con lo que queda demostrado que esta operación es cerrada.

En consecuencia, al no ser un conjunto vacío y cumplir con la condición necesaria y suficiente para que un conjunto $S \subseteq V$ sea subespacio vectorial de éste, $S = S_1 \cap S_2$ es un subespacio vectorial.

2.- La suma de dos subespacios es un subespacio vectorial

Recordemos en primer lugar la definición de suma de subespacios: si S_1 y S_2 son dos subespacios incluidos en un espacio vectorial V , el subespacio $S = S_1 + S_2$ está formado por todos los vectores \mathbf{v} de V tales que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, con \mathbf{v}_1 perteneciente a S_1 y \mathbf{v}_2 perteneciente a S_2 .

Para probar que $S = S_1 + S_2$ es efectivamente un subespacio vectorial de V debe cumplirse:

a.- Que S no sea vacío

Como definíamos la suma de subespacios de modo que si \mathbf{v} pertenece a S entonces $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ con \mathbf{v}_1 perteneciente a S_1 y \mathbf{v}_2 perteneciente a S_2 , al ser S_1 y S_2 subespacios el vector nulo $\mathbf{0}$ pertenece a ambos, por lo que dicho vector también pertenece a S , lo que demuestra que la suma de subespacios cuenta por lo menos con un elemento: el vector nulo.

b.- Que sea cerrado para la suma

Consideremos un vector \mathbf{u} que pertenece a $S = S_1 + S_2$ y un vector \mathbf{v} que pertenece a $S = S_1 + S_2$.

Debemos probar que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ pertenece a $S = S_1 + S_2$.

Si \mathbf{u} pertenece a $S_1 + S_2$ entonces $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ con \mathbf{u}_1 perteneciente a S_1 y \mathbf{u}_2 perteneciente a S_2 , por definición de suma de subespacios.

Del mismo modo, si \mathbf{v} pertenece a $S_1 + S_2$ entonces $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ con \mathbf{v}_1 perteneciente a S_1 y \mathbf{v}_2 perteneciente a S_2 , por similar razón.

Por lo tanto, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$

Al segundo miembro de esta expresión la podemos agrupar aplicando la propiedad asociativa de la suma de vectores de la siguiente forma:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2) \quad (1)$$

En la ecuación (1), el primer término encerrado entre paréntesis incluye a dos vectores pertenecientes a S_1 (\mathbf{u}_1 y \mathbf{v}_1), por lo que hemos expuesto en los párrafos anteriores. El segundo sumando incluye a dos vectores pertenecientes a S_2 (\mathbf{u}_2 y \mathbf{v}_2), por la misma razón. En consecuencia, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (vector perteneciente a S) está calculado como suma de un vector de S_1 y un vector de S_2 , con lo cual probamos que esta operación entre subespacios es cerrada para la suma.

c.- Que sea cerrado para el producto por un escalar

Consideremos un vector \mathbf{u} que pertenece a $S = S_1 + S_2$ y un escalar α que pertenece al cuerpo de los números reales (\mathbf{R}).

Obviamente $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, con \mathbf{u}_1 perteneciente a S_1 y \mathbf{u}_2 perteneciente a S_2 , por definición de suma de subespacios.

Debemos probar que $\alpha\mathbf{u}$ pertenece a $S_1 + S_2$.

Si \mathbf{u} pertenece a $S = S_1 + S_2$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, como hemos señalado más arriba.

Multiplicando miembro a miembro por el escalar α , resulta:

$$\alpha\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \alpha\mathbf{u}_1 + \alpha\mathbf{u}_2 \quad (2)$$

Como S_1 es por definición subespacio vectorial de V , entonces es cerrado para el producto por un escalar, por lo que $\alpha\mathbf{u}_1$ pertenece a S_1

De la misma manera, como S_2 es por definición subespacio vectorial de V , entonces es cerrado para el producto por un escalar, por lo que $\alpha\mathbf{u}_2$ pertenece a S_2

Si los dos sumandos del segundo miembro de la ecuación indicada como (2) pertenecen respectivamente a S_1 y a S_2 , entonces por definición de suma de subespacios, el vector $\alpha \mathbf{u}$ pertenece a $S = S_1 + S_2$, con lo que queda demostrado que esta operación es cerrada para el producto por un escalar y por lo tanto la suma de subespacios es también un subespacio vectorial de V .

3.- El complemento ortogonal de un subespacio vectorial es también subespacio vectorial

Definimos complemento ortogonal de un subespacio $S \subset V$ (siendo V espacio vectorial) a un conjunto, que designáramos como S^\perp , formado por todos aquellos vectores \mathbf{u} pertenecientes a V que eran perpendiculares a todos los vectores \mathbf{v} pertenecientes a S .

Es decir, que $S^\perp = \{\mathbf{u} \in V / \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ con } \mathbf{v} \in S\}$

Para probar que S^\perp es un subespacio vectorial, debemos probar que se cumplan las tres condiciones siguientes:

a.- Que S^\perp no sea vacío

Como S es subespacio vectorial de V , el vector nulo $\mathbf{0}$ pertenece a S . Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{0} = 0$, con \mathbf{u} perteneciente a S^\perp , entonces $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ verifica la ecuación anterior, por lo que el complemento ortogonal no es vacío.

b.- Que sea cerrado para la suma

Se debe probar que si \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 pertenecen a S^\perp , entonces $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ también pertenecen a S^\perp .

Consideremos un vector \mathbf{v} perteneciente a S .

Por definición de complemento ortogonal,

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1) \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

Sumando miembro a miembro (1) y (2):

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \text{ es perpendicular a } \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \text{ pertenece a } S^\perp \Rightarrow S^\perp \text{ es cerrado para la suma.}$$

c.- Que sea cerrado para el producto por un escalar

Se debe demostrar que si \mathbf{u} pertenece a S^\perp , entonces $\alpha \mathbf{u}$ pertenece a S^\perp .

Si \mathbf{u} pertenece a S^\perp , entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ con $\mathbf{v} \in S$.

Multiplicando miembro a miembro la ecuación anterior por el escalar α , resulta:

$$\alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \alpha \cdot 0 = 0$$

Aplicando la propiedad asociativa mixta del producto escalar de vectores con un número real, resulta:

$$\alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

con lo cual resulta que $\alpha \mathbf{u}$ es perpendicular a \mathbf{v} , y por lo tanto pertenece al complemento ortogonal de S , es decir a S^\perp . Con ello queda probado que es cerrado para el producto con un escalar y por lo tanto S^\perp es un subespacio vectorial de V .

4.- El conjunto S de todas las combinaciones lineales de $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es un subespacio vectorial de V

Este concepto es el de subespacio generado. Se dice que S es el subespacio generado por los elementos de A , y se suele designar como $S = \text{gen} \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$



Debe demostrarse que el conjunto S así conformado es un subespacio vectorial de V. Para ello deben cumplirse las condiciones siguientes:

a.- Que S no sea vacío

Dentro de todas las combinaciones lineales posibles que pueden hacerse con los elementos de A, una de ellas es aquella en la que los escalares son todos nulos.

Es decir, un vector $v \in S$ se obtiene como;

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n$$

Si los escalares k_1, k_2, \dots, k_n son todos iguales a 0, entonces $v = \mathbf{0}$ y por lo tanto S no es vacío ya que contiene al menos un elemento.

b.- Que sea cerrado para la suma

Si v es un vector de S, entonces:

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n \quad (1)$$

y si u es un vector de S, también puede escribirse:

$$u = t_1v_1 + t_2v_2 + \dots + t_nv_n \quad (2)$$

donde los k_i y los t_i son números reales.

Sumando (1) y (2) miembro a miembro, y asociando, resulta:

$$v + u = (k_1 + t_1)v_1 + (k_2 + t_2)v_2 + \dots + (k_n + t_n)v_n$$

Haciendo

$$(k_1 + t_1) = \alpha_1$$

$$(k_2 + t_2) = \alpha_2$$

.....

$$(k_n + t_n) = \alpha_n$$

donde los α_i son escalares pertenecientes al cuerpo de los números reales.

$$v + u = \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \dots + \alpha_nv_n$$

con lo que se demuestra que $v + u$ se puede obtener como combinación lineal de los vectores que integran el conjunto A, por lo que $v + u \in S$ y S es por lo tanto cerrado para la suma.

c.- Que sea cerrado para el producto por un escalar

Si v es un vector de S, entonces:

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n \quad (3)$$

Si λ es un escalar, multiplicando (3) miembro a miembro por éste resulta:

$$\lambda v = \lambda(k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n) = \lambda k_1v_1 + \lambda k_2v_2 + \dots + \lambda k_nv_n$$

Haciendo:

$$\lambda k_1 = t_1$$

$$\lambda k_2 = t_2$$

.....

$$\lambda k_n = t_n$$

resulta:

$$\lambda v = t_1v_1 + t_2v_2 + \dots + t_nv_n$$

lo que demuestra que $\lambda \mathbf{v}$ se puede obtener como combinación lineal de los vectores \mathbf{v}_i del conjunto A, por lo que $\lambda \mathbf{v}$ pertenece a S, siendo entonces S cerrado para el producto por un escalar y en consecuencia, subespacio vectorial de V.

BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

Un conjunto finito de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base para un espacio vectorial V si:

- a) $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.
- b) $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ genera a V.

- Todo conjunto de n vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^n es una base de \mathbb{R}^n .

EJEMPLO

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\hat{i} + y\hat{j} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Una Base canonica para \mathbb{R}^2 es $B_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Sea $V = \mathbb{R}^3$. Encuentre una base para el conjunto de vectores que están en el plano.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / 2x - y + 3z = 0 \right\}$$

$$2x - y + 3z = 0$$

$$y = 2x + 3z$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} x \\ 2x + 3z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{gen} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

\therefore Una Base canonica para \mathfrak{R}^3 es $B_w = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

TEOREMA

Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base para V y si $v \in V$, entonces existe un conjunto único de escalares c_1, c_2, \dots, c_n tales que:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

DEMOSTRACION

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n \quad (1)$$

$$v = d_1 v_1 + d_2 v_2 + \dots + d_n v_n \quad (2)$$

$$(1) = (2)$$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = d_1 v_1 + d_2 v_2 + \dots + d_n v_n$$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n - d_1 v_1 - d_2 v_2 - \dots - d_n v_n = \bar{0}$$

$$(c_1 - d_1)v_1 + (c_2 - d_2)v_2 + \dots + (c_n - d_n)v_n = \bar{0}$$

$$\begin{aligned} c_1 - d_1 = 0 &\Rightarrow c_1 = d_1 \\ &c_2 = d_2 \\ &c_n = d_n \end{aligned}$$

• Por lo tanto para cada vector $v \in V$, existe un conjunto único de escalares, tales que, cualquier vector $v \in V$ se lo puede expresar como una combinación lineal del conjunto único.

TEOREMA

Sea $V = \mathfrak{R}^n$ y $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, m vectores de V . Si $m > n$, entonces $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ es linealmente dependiente.

Sea v_1, v_2, \dots, v_m vectores de \mathbb{R}^n

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}; \dots; \quad v_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + c_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1m}c_m &= 0 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2m}c_m &= 0 \\ \vdots & \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \dots + a_{nm}c_m &= 0 \end{aligned}$$

• En un sistema homogéneo de n ecuaciones con m variables, cuando $m > n$ el conjunto tiene infinitas soluciones, por lo tanto β es linealmente dependiente.

DIMENSION DE UN ESPACIO VECTORIAL

Si el espacio vectorial V tiene una base finita, entonces la dimensión de V es el número de vectores en todas las bases y V se llama espacio vectorial de dimensión finita. La dimensión de V se la denota como: $\dim V$.

EJEMPLOS:

$$\begin{aligned} \text{Si } V = P_n &\quad \Rightarrow \quad \dim P_n = (n + 1) \\ \text{Si } V = M_{2 \times 2} &\quad \Rightarrow \quad \dim M_{2 \times 2} = 4 \\ \text{Si } V = M_{2 \times 3} &\quad \Rightarrow \quad \dim M_{2 \times 3} = 6 \end{aligned}$$

- Todo espacio vectorial que tenga un subespacio de dimensión infinita es también de dimensión infinita.
- Si W es un subespacio de V y $\dim V = n$, entonces:
 - i) $W = \{\vec{0}\} \Rightarrow \dim W = 0$
 - ii) $W = \text{gen}\{v_1\} \Rightarrow \dim W = 1$
 - iii) $W = \text{gen}\{v_1, v_2, v_3\} \Rightarrow \dim W = 3$

EJEMPLO:

Determinar una base para el espacio generador $S = \text{gen}\{2x - y + 3z, 4x - 2y + 6z, -6x + 3y - 9z\}$.
 Encontrar su dimensión.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 4x - 2y + 6z = 0 \\ -6x + 3y - 9z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & : & 0 \\ 4 & -2 & 6 & : & 0 \\ -6 & 3 & -9 & : & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x - y + 3z = 0$$

$$\begin{aligned} H &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / 2x - y + 3z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / 2x + 3z = y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} x \\ 2x + 3z \\ z \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \beta_H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim \beta_H = 2 \end{aligned}$$

Determinar una base para el espacio generador $S = \text{gen}\{1 - x + x^2, 2 + x - x^2, x + x^2, 1 - x - x^2\}$.
 Encontrar su dimensión.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1 - x + x^2 = 0 \\ 2 + x - x^2 = 0 \\ x + x^2 = 0 \\ 1 - x - x^2 = 0 \end{cases} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 2 & 1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 1 & -1 & -1 & : & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 3 & 0 & 0 & : & 0 \\ 1 & 0 & 2 & : & 0 \\ 0 & 0 & -2 & : & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 1 & 0 & 0 & : & 0 \\ 1 & 0 & 2 & : & 0 \\ 0 & 0 & -2 & : & 0 \end{pmatrix} \\ & \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 1 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 2 & : & 0 \\ 0 & 0 & -2 & : & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 1 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 2 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 0 \\ 1 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$B_s = \{x^2, x, 1\} \dim = 3$$

Proceso de ortonormalización de bases de Gram-Schmidt.

La condición para que un conjunto de vectores sea considerado base de un espacio vectorial es que sea un S.G.I.i

Una base puede estar conformada por un conjunto que cumpla las condiciones antedichas, siendo las misma integrada por vectores de módulo cualquiera.

Existen algunas bases particulares: aquellas cuyos vectores cumplen con la condición de ser perpendiculares dos a dos, es decir que cada vector de la base es perpendicular a todos los demás de la misma. Este tipo de base recibe el nombre de base ortogonal.

Si además de cumplir con la condición anterior (vectores todos perpendiculares entre sí) los integrantes de la base son de módulo unitario, es decir, versores, se trata de una base ortonormal.

Puede demostrarse que, en todo espacio vectorial, a partir de una base cualquiera, puede construirse al menos una base ortonormal (se obtendrán distintas bases ortonormales de acuerdo con el orden en que tomemos los vectores de la base dada para normalizarlos).

Por razones prácticas realizaremos el proceso para una base cualquiera del espacio tridimensional, sin que ello haga perder rigor a la demostración, que puede extrapolarse para cualquier espacio.

Sea entonces, en el espacio tridimensional el conjunto base $B = \{x_1, x_2, x_3\}$. El proceso de ortonormalización se realiza con los siguientes pasos:

Paso inicial: a efectos de asegurarnos que el conjunto que pretendemos ortonormalizar es una base de su espacio vectorial, verificamos para este caso del E^3 calculando el producto mixto. Si el mismo da como resultado un número distinto de cero, concluimos que se trata de una base (vectores no coplanares) y comenzamos el proceso.

1^{er} paso: Tomamos un vector cualquiera de la base, por ejemplo, x_1 y lo normalizamos, es decir,

$$\text{calculamos su versor asociado: } \check{y}_1 = \frac{x_1}{|x_1|}$$

hemos obtenido de este modo el primer vector de la base ortonormal.

2^{do} paso: tomamos un segundo vector de la base a ortonormalizar, por ejemplo: x_2

Puede suceder:

- que x_2 sea perpendicular a \check{y}_1 , lo que se verifica efectuando el producto escalar $x_2 \bullet \check{y}_1$. Si el resultado es nulo, los vectores son perpendiculares y entonces el segundo vector de la base ortonormal se obtiene haciendo la operación $\check{y}_2 = \frac{x_2}{|x_2|}$.

b) En el caso en que $x_2 \cdot \check{y}_1$ resulte distinto de cero, para obtener un segundo vector de la base ortonormal que resulte perpendicular a \check{y}_1 , deberá construirse la combinación lineal $z_2 = x_2 + \alpha \check{y}_1$, que verifique $z_2 \cdot \check{y}_1 = 0$. Nuestro problema es, en consecuencia, encontrar el valor del escalar α que permita cumplir la condición $z_2 \cdot \check{y}_1 = 0$. El valor de α resulta de $z_2 \cdot \check{y}_1 = 0 = (x_2 + \alpha \check{y}_1) \cdot \check{y}_1 = x_2 \cdot \check{y}_1 + \alpha \check{y}_1 \cdot \check{y}_1$.

Siendo $\check{y}_1 \cdot \check{y}_1 = 1$ (producto escalar entre vectores paralelos), se obtiene como valor a asignar en la combinación lineal $\alpha = -x_2 \cdot \check{y}_1$. Valor que reemplazado en z_2 nos permite obtener un vector perpendicular a la dirección de \check{y}_1 . Dicho vector es:

$z_2 = x_2 - (x_2 \cdot \check{y}_1) \check{y}_1$. Obtenido este vector, el segundo vector de la base ortonormal es:

$$\check{y}_2 = \frac{z_2}{|z_2|}$$

3er paso: Tomamos ahora el último vector de la base a ortonormalizar, x_3

Para obtener un vector a la vez perpendicular a \check{y}_1 e \check{y}_2 , construimos la combinación lineal $z_3 = x_3 + \beta \check{y}_1 + \gamma \check{y}_2$. Para que el vector z_3 cumpla con las condiciones prefijadas, deberá verificarse simultáneamente que $z_3 \cdot \check{y}_1 = 0$ y que $z_3 \cdot \check{y}_2 = 0$.

$$z_3 \cdot \check{y}_1 = 0 = (x_3 + \beta \check{y}_1 + \gamma \check{y}_2) \cdot \check{y}_1$$

$$z_3 \cdot \check{y}_2 = 0 = (x_3 + \beta \check{y}_1 + \gamma \check{y}_2) \cdot \check{y}_2$$

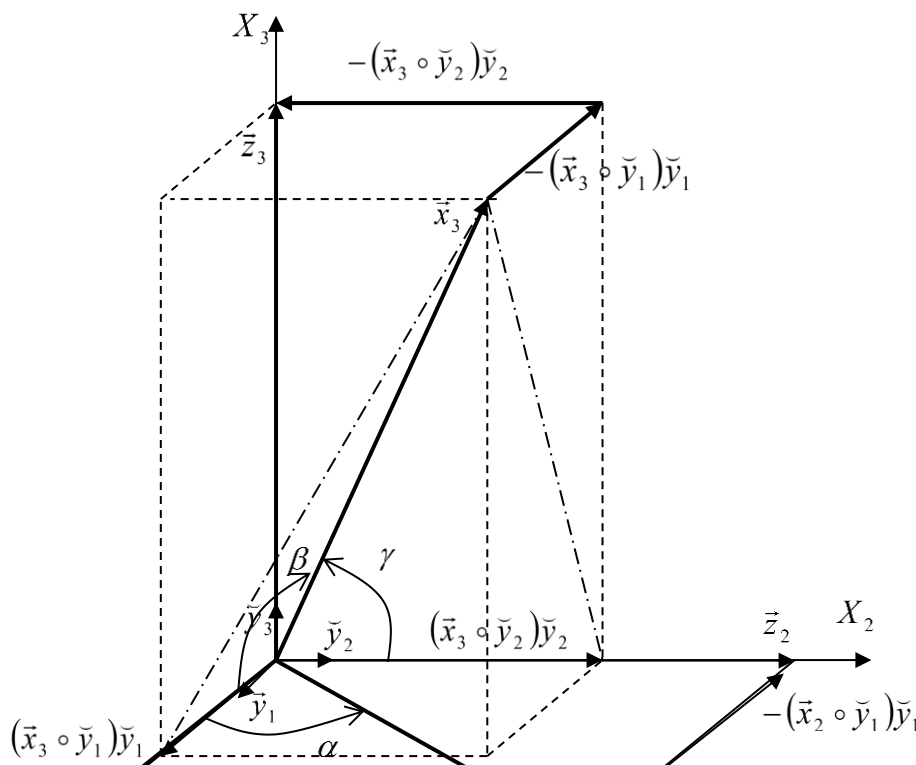
desarrollando los paréntesis y haciendo uso de las propiedades del producto escalar para vectores paralelos y vectores perpendiculares, se llega al igual que en el paso anterior a:

$$z_3 = x_3 - (x_3 \cdot \check{y}_1) \check{y}_1 - (x_3 \cdot \check{y}_2) \check{y}_2$$

que se normaliza: $\check{y}_3 = \frac{z_3}{|z_3|}$

y la base ha quedado ortonormalizada.

Interpretación Geométrica del Proceso de Ortonormalización de Bases.



1^{er} paso: se toma el vector \vec{x}_1 y se normaliza: $\vec{y}_1 = \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|}$

2^{do} paso: se construye un vector \vec{z}_2 perpendicular a \vec{y}_1 expresado como combinación lineal de \vec{x}_2 e \vec{y}_1 :
 para ello se toma la proyección de $|\vec{x}_2|$ sobre el eje \vec{X}_1 : $|\vec{x}_2| \cdot \cos \alpha = |\vec{x}_2| \cdot |\vec{y}_1| \cdot \cos \alpha = \vec{x}_2 \circ \vec{y}_1$;
 el vector proyección de \vec{x}_2 resulta entonces: $(\vec{x}_2 \circ \vec{y}_1)\vec{y}_1$; la suma de $(\vec{x}_2 \circ \vec{y}_1)\vec{y}_1$ y \vec{z}_2 da
 como resultado \vec{x}_2 ; entonces la combinación lineal buscada es: $\vec{z}_2 = \vec{x}_2 - (\vec{x}_2 \circ \vec{y}_1)\vec{y}_1$;
 normalizamos este vector, resultando $\vec{y}_2 = \frac{\vec{z}_2}{|\vec{z}_2|}$

3^{er} paso: con análogo razonamiento, la proyección de \vec{x}_3 sobre el eje X_1 es el vector $(\vec{x}_3 \circ \vec{y}_1)\vec{y}_1$ y la
 proyección de \vec{x}_3 sobre el eje X_2 es $(\vec{x}_3 \circ \vec{y}_2)\vec{y}_2$. Sumando \vec{x}_3 con los opuestos de $(\vec{x}_3 \circ \vec{y}_1)\vec{y}_1$
 y $(\vec{x}_3 \circ \vec{y}_2)\vec{y}_2$ se obtiene $\vec{z}_3 = \vec{x}_3 - (\vec{x}_3 \circ \vec{y}_1)\vec{y}_1 - (\vec{x}_3 \circ \vec{y}_2)\vec{y}_2$ que normalizado da el vector

$$\vec{y}_3 = \frac{\vec{z}_3}{|\vec{z}_3|}$$

La base queda ortonormalizada.

Bibliografía obligatoria y recomendada:

- Armando Rojo: Álgebra I y II
- Hector Di Caro: Álgebra y Geometría Analítica.
- Sagastume Berra, G. Fernández: Álgebra y Cálculo Numérico.
- Lentin, Rivaud: Álgebra Moderna
- Donato Di Pietro: Geometría Analítica.
- Ch. H. Lehmann Geometría Analítica.
- Louis Leithold El Cálculo con Geometría
- P. Smith, A. Gale Elementos de G. Analítica