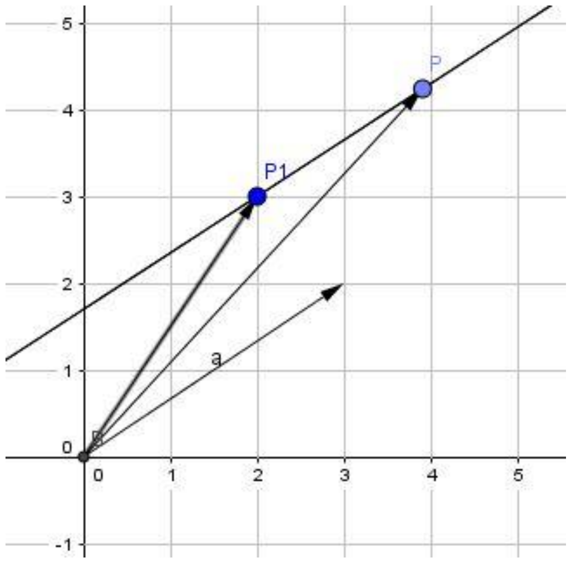
(Apunte basado en ALGEOMETRIA del Ing. Lopez, Carlos)

## Recta en E2

Lugar geométrico de los puntos tales que, tomados dos puntos cualesquiera distintos de ella, por ejemplo $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, el valor de la expresión: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ resulta siempre constante.

Una recta queda geométricamente determinada, si se conocen un punto $P_1$ ($P_1 \in r$) y la dirección determinada por un vector $\vec{a}$.

$$\overrightarrow{OP} = x\breve{i} + y\breve{j} \quad \text{(vector posición del punto P)}$$
$$\overline{O}\overline{P_1} = x_1\breve{i} + y_1\breve{j} \quad \text{(vector fijo)}$$
$$\vec{a} = a_1\breve{i} + a_2\breve{j} \quad \text{(vector director de la recta r)}$$




Como el vector $\overline{P_1}\overline{P}$ es paralelo al vector $\vec{a}$ podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$\overline{P_1}\overline{P} = \lambda\left(a_1\breve{i} + a_2\breve{j}\right)$$

$$\overline{O}\overline{P} = \overline{O}\overline{P_1} + \lambda\vec{a} \qquad \text{Ecuación vectorial de la Recta}$$

$$\left(x\breve{i} + y\breve{j}\right) = \left(x_1\breve{i} + y_1\breve{j}\right) + \lambda\left(a_1\breve{i} + a_2\breve{j}\right)$$

de donde resultan las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda a_1 \\ y = y_1 + \lambda a_2 \end{cases} \qquad \text{Ecuaciones paramétricas de la Recta}$$

Despejando el valor de $\lambda$ en las expresiones anteriores obtenemos:

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\lambda$$ Ecuación Cartesiana Simétrica

Por Ejemplo:

Hallar la ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y cartesiana simétrica de la recta, que pasa por el punto $P_1$ (1,-2) y es paralela al vector $\vec{a}=2\breve{i}+\breve{j}$

$$\overline{OP}=\overline{OP_1}+\lambda\vec{a}$$

reemplazando valores resulta:

$$x\breve{i}+y\breve{j}=(1\breve{i}-2\breve{j})+\lambda(2\breve{i}+\breve{j})$$

obteniéndose,

$$\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-2+\lambda \end{cases}$$

y despejando el valor del parámetro:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}$$

Consideremos la ecuación cartesiana simétrica de la recta $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\lambda$

operando resulta:

$$a_2(x-x_1)=a_1(y-y_1)$$
$$a_2x-a_2x_1=a_1y-a_1y_1$$

pasando todos los términos al primer miembro e igualando a 0:

$$a_2x-a_1y-a_2x_1+a_1y_1=0$$

renombrando:

$$a_2=A \qquad -a_1=B \qquad -a_2x_1+a_1y_1=C \qquad (5)$$

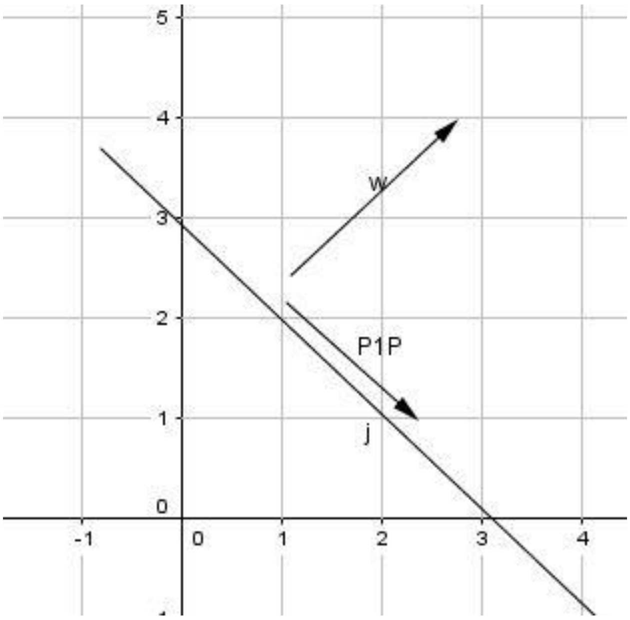
obtenemos la expresión:

A x + B y + C = 0 Ecuación General o implícita

Recta definida por un Punto y un Vector normal.

Sea el punto $P_1(x_1;\ y_1)$ y el vector $\vec{n}$, si se construye un vector $P_1P$. Dicho vector y $\vec{n}$ resultan perpendiculares, por lo que el producto escalar entre ellos es 0.

$$\vec{n} \bullet P_1P = 0$$




$$(A\,\vec{i} + B\,\vec{j}) \bullet \left[(x - x_1)\,\vec{i} + (y - y_1)\,\vec{j}\right] = 0$$
$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$
$$Ax + By + (-Ax_1 - By_1) = 0$$

llegando: A x + B y + C = 0    Ecuación General de la Recta

Si en la ecuación A x + B y + C = 0 es B $\neq$ 0 resulta

$$By = -Ax - C$$
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

renombrando:

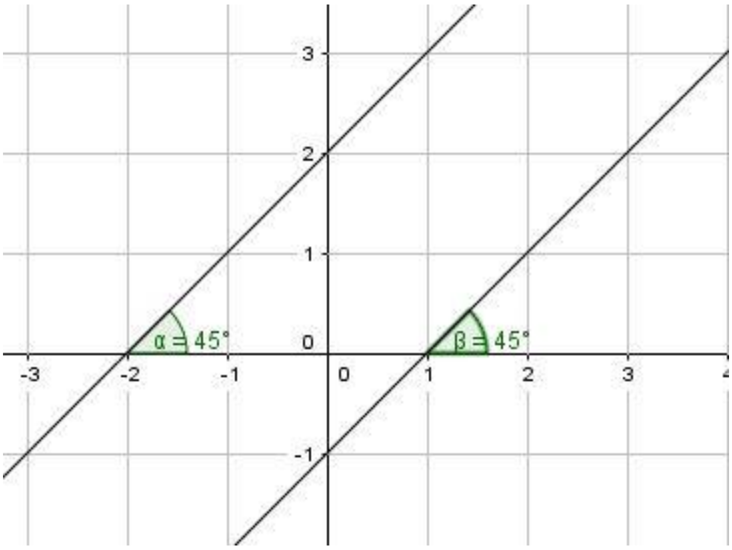
$$-\frac{A}{B} = m \qquad\qquad -\frac{C}{B} = b$$

obtenemos:

$y = mx + b$   Ecuación explícita de la Recta

Condición de paralelismo entre rectas

Dadas dos rectas paralelas $r_1$ y $r_2$ de ecuaciones explícitas




$$y = m_1 x + b_1$$
$$y = m_2 x + b_2$$

por ser paralelas, tienen igual inclinación, es decir:

$$\alpha = \beta$$

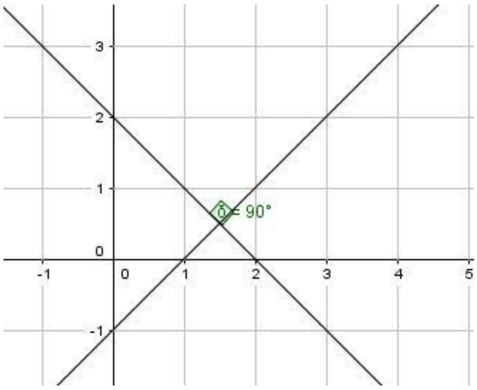
Por lo tanto

$tg\alpha = tg\,\beta \quad \Rightarrow \quad m_1 = m_2$ que nos da la condición de paralelismo entre dos rectas.

Condición de perpendicularidad entre rectas

Sean $r_1$ y $r_2$ dos rectas perpendiculares, cuyas ecuaciones explícitas son:

$$r_1 = y = m_1 x + b_1$$
$$r_2 = y = m_2 x + b_2$$




Sean $\alpha$ y $\beta$ las inclinaciones de dichas rectas:

$$\alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$$

por lo tanto siendo:

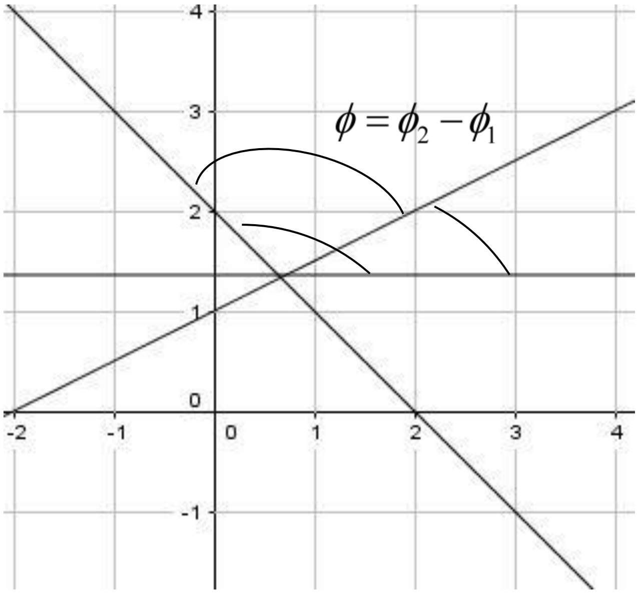
$$m_2 = tg\beta \ = tg\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{sen\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$m_2 = \frac{sen\alpha \bullet \cos\frac{\pi}{2} + \cos\alpha \bullet sen\frac{\pi}{2}}{\cos\alpha \bullet \cos\frac{\pi}{2} - sen\alpha \bullet sen\frac{\pi}{2}}$$

la expresión anterior se reduce a:

$m_2 = \frac{\cos\alpha}{-sen\alpha} = \quad -\frac{1}{tg\phi_1} = -\frac{1}{m_1}$ que es la condición de perpendicularidad buscada.

Ángulo entre rectas




Trataremos de encontrar una expresión que nos permita calcular el ángulo que forman dos rectas al cortarse en un punto. De acuerdo con la figura el ángulo que forman las rectas $r_1$ y $r_2$ es:

$$\phi = \phi_2 - \phi_1$$

resultando de utilizar la expresión que permite calcular la tangente de la diferencia de dos ángulos:

$$tg\phi = tg(\phi_2 - \phi_1) = \frac{tg\phi_2 - tg\phi_1}{1 + tg\phi_1 \bullet tg\phi_2} \quad \text{siendo}$$

$$tg\phi_1 = m_1 \qquad tg\phi_2 = m_2$$

$$tg\phi = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \bullet m_2} \right|$$

Ecuación de la recta que pasa por un punto

Partiendo de la ecuación explícita de la recta, **y = m x + b** y teniendo en cuenta que la recta debe pasar por el punto $P_1 (x_1,y_1)$ , las coordenadas de este punto, deben satisfacer la ecuación de la recta, es decir, se cumple que:

$$y_1 = mx_1 + b$$

Obtenemos:

$$y - y_1 = mx + b - mx_1 - b$$
$$y - y_1 = m \bullet (x - x_1)$$

ecuación buscada.

Ecuación de la recta que pasa por 2 puntos.

Dados dos puntos $P_1 (x_1,y_1)$ y $P_2 (x_2,y_2)$ debemos hallar la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos. Si la recta pasa por el punto $P_1 ( x_1,y_1 )$ debe verificar la ecuación:

$$y - y_1 = m \bullet (x - x_1)$$

si pasa además por el punto $P_2\,(x_2,y_2)$

$$y - y_2 = m \bullet (x - x_2)$$

de la cual se obtiene el valor de la pendiente m, cuando conocemos dos puntos que le pertenecen, es decir:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si reemplazamos el valor de **m** en la expresión anterior se obtiene:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \bullet (x - x_1)$$

y pasando $y_2$ - $y_1$ al primer miembro obtenemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

## FORMA SEGMENTARIA DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA.

Sea la recta r, que no pasa por el origen O (0,0) del sistema coordenado, e intercepta a los ejes en los puntos P(p,0) y Q(0,q).
Para hallar la ecuación segmentaria de la recta, podemos partir de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

siendo, en este caso particular:

$$x_1 = p \qquad x_2 = 0$$
$$y_1 = 0 \qquad y_2 = q$$

con lo que resulta:

$$\frac{y - 0}{q - 0} = \frac{x - p}{0 - p}$$

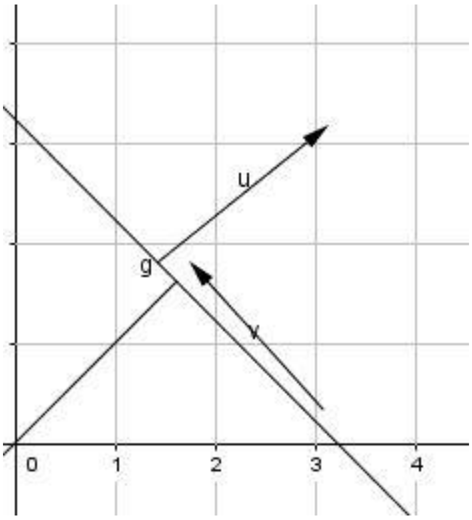
efectuando operaciones se obtiene:

$$\frac{y}{q} = \frac{x}{-p} + 1 = -\frac{x}{p} + 1$$

pasando $-\dfrac{x}{p}$ al primer miembro de la ecuación obtenemos:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \qquad \text{Ecuación Segmentaria}$$

## FORMA NORMAL DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA




La ecuación segmentaria de la recta puede escribirse $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; para pasarla a la forma normal basta con establecer las siguientes relaciones que se observan en los dos triángulos de la figura precedente:

$$\frac{p}{a}=\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad a=\frac{p}{\cos\alpha}$$

$$\frac{p}{b}=sen\alpha \quad \Rightarrow \quad b=\frac{p}{sen\alpha}$$

reemplazando en la ecuación segmentaria:

$$\frac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}}+\frac{y}{\frac{p}{sen\alpha}}=1$$

que puede expresarse: $\frac{x\cdot\cos\alpha}{p}+\frac{y\cdot sen\alpha}{p}=1$, que transformada convenientemente conduce a $x\cdot\cos\alpha+y\cdot sen\alpha-p=0$ en la cual $\alpha$ es el ángulo que forma con el eje de abscisas el segmento $p$ construido normalmente a la recta.

**PLANO.**

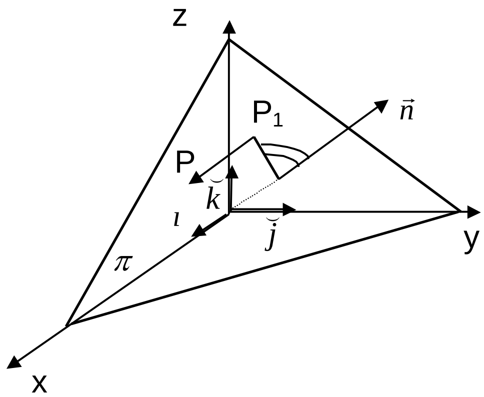
**Ecuación vectorial y cartesiana del plano.**

Sea un plano $\pi$ ; $P_1$ ($x_1$, $y_1$, $z_1$) un punto que le pertenece y $\vec{n}=n_1\breve{i}+n_2\breve{j}+n_3\breve{k}$ un vector normal a $\pi$.

Un punto P de $\pi$ pertenecerá al plano si y sólo si conforma con $P_1$ un vector perpendicular a $\vec{n}$ ; ello implica que el producto escalar $P_1\vec{P}\bullet\vec{n}$ es nulo; recíprocamente $P_1\vec{P}\bullet\vec{n}=0$ indica la perpendicularidad entre los vectores.

Siendo:

$P_1\vec{P} = (x - x_1)\breve{i} + (y - y_1)\breve{j} + (z - z_1)\breve{k}$ y $\vec{n} = n_1\breve{i} + n_2\breve{j} + n_3\breve{k}$




resulta $(x - x_1)n_1 + (y - y_1)n_2 + (z - z_1)n_3 = 0$ expresión en la cual haciendo el reemplazo $n_1 = A;\quad n_2 = B;\quad n_3 = C$ obtenemos:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

que es la ecuación del plano que pasa por $P_1\ (x_1, y_1, z_1)$ en la cual A, B y C son las coordenadas del vector normal que conforman lo que se denomina *SISTEMA DE NUMEROS DIRECTORES DEL PLANO.*

Desarrollando la expresión anterior:

$$Ax + By + Cz - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = 0$$

que escribimos por ser $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = cte = -D$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$ **ECUACIÓN GENERAL DEL PLANO.**

FORMA SEGMENTARIA DE LA ECUACIÓN DEL PLANO.

Partiendo de la expresión de la ecuación general

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

y operando como se indica:

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = \frac{-D}{-D} \quad ; \quad \frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1$$

con $\frac{-D}{A} = p \quad ; \quad \frac{-D}{B} = q \quad ; \quad \frac{-D}{C} = r \quad obtenemos \quad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$

**TRAZAS SOBRE LOS PLANOS COORDENADOS**.

En rigor en el espacio: la traza sobre el plano **xy** debe obtenerse como intersección entre $\pi$ y el plano xy cuya ecuación es z = 0, o sea; las ecuaciones de la traza son

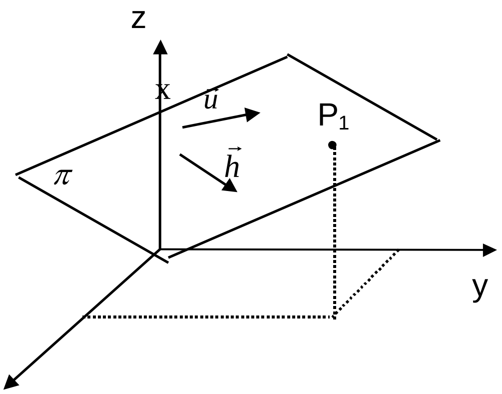
$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

es decir que estamos expresando la traza sobre el plano xy como intersección entre dos planos. Con

similar razonamiento las expresiones de las trazas sobre los planos xz e yz. Respectivamente son:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

**PLANO QUE PASA POR UN PUNTO Y ES PARALELO A DOS VECTORES**.




Sean $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto en el plano $\pi$ y
$\vec{u} = u_1\breve{i} + u_2\breve{j} + u_3\breve{k}$
$\vec{h} = h_1\breve{i} + h_2\breve{j} + h_3\breve{k}$ dos vectores de *E³*.

Si queremos obtener la ecuación de un plano que pase por $P_1$ y sea paralelo a $\vec{u}$ y $\vec{h}$, dicho plano deberá ser normal al vector resultante del producto vectorial entre $\vec{u}$ y $\vec{h}$. Tendremos en consecuencia:

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} = (u_2h_3 - u_3h_2)\breve{i} - (u_1h_3 - u_3h_1)\breve{j} - (u_1h_2 - u_2h_1)\breve{k}$$

$\vec{w}$ es un vector perpendicular a $\pi$.

$P_1\vec{P} = (x - x_1)\breve{i} + (y - y_1)\breve{j} + (z - z_1)\breve{k}$ es un vector de $\pi$.

$P_1\vec{P} \bullet \vec{w} = 0$ es la ecuación del plano, o sea,

$$(u_2h_3 - u_3h_2)(x - x_1) + (u_1h_3 - u_3h_1)(y - y_1) + (u_1h_2 - u_2h_1)(z - z_1) = 0$$

es la ecuación del plano buscado.

**Forma normal de la Ecuación del Plano.**

Según hemos visto, la ecuación general del plano tiene el aspecto

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Como resulta sencillo de ver, un mismo plano puede representarse analíticamente mediante distintas ecuaciones, siempre y cuando sus coeficientes resulten proporcionales.

Si $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$

*Las ecuaciones tienen como lugar geométrico el mismo plano.*

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

y

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Entre todas las ecuaciones posibles de un mismo plano, en las cuales las ternas $(A_i;B_i;C_i)$ corresponden a las componentes de un vector normal al mismo, hay una
ecuación particular en la cual el vector normal es de módulo unitario . Dicho vector, que por ser de módulo igual a la unidad recite el nombre de **versor,** puede obtenerse a partir de cualquier vector normal a un plano dado, dividiendo sus componentes por el módulo del vector. Las componentes del versor serán:

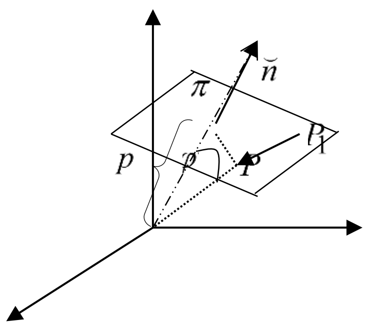
$$\breve{n}=\frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$$

siendo $\alpha,\ \beta\ y\ \gamma$ los ángulos directores de $\breve{n}$. Podemos entonces escribir la ecuación normal del plano como:

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^w}}=0$$

o bien: $\dfrac{A}{\sqrt{A^3+B^2+C^2}}x+\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y+\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z+\dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$

El valor del término independiente puede obtenerse del análisis de la siguiente figura:




$$P_1\vec{P}\bullet\breve{n}=0$$

$$\left[(x-x_1)\breve{i}+(y-y_1)\breve{j}+(z-z_1)\breve{k}\right]\bullet\left(\cos\alpha\cdot\breve{i}+\cos\beta\cdot\breve{j}+\cos\gamma\cdot\breve{k}\right)=(x-x_1)\cdot\cos\alpha+(y-y_1)\cdot\cos\beta+(z-z_1)\cdot\cos\gamma=0$$

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-(x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma)=0$$

El paréntesis de la expresión anterior es el desarrollo del producto escalar $OP_1\bullet\breve{n}=|OP_1|\cdot|\breve{n}|\cdot\cos\varphi=|O\vec{P}_1|\cdot\cos\varphi=p$ que es la distancia entre el origen de coordenadas y el plano $\pi$.

Como el paréntesis de la expresión es también igual al término independiente $\dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=-p$, la ecuación normal del plano puede escribirse $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$

Resulta entonces que, para pasar de la ecuación general del plano a la forma normal, basta con dividir la ecuación general por el módulo del vector normal al plano $\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^w}}=0$, resultando una ecuación de la forma: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$

Para saber si la ecuación de un plano está expresada en la forma normal, debe verificarse que la suma de los cuadrados de los cosenos directores resulte igual a la unidad $\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\right)$. De esta última expresión puede inferirse que los ángulos directores no son independientes: dados dos de ellos, queda fijado el tercero mediante la relación precedente.
$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$.

ÁNGULO ENTRE PLANOS

Teniendo en cuenta que el sistema de números directores de un plano corresponde a las componentes de un vector normal al mismo (se trata de los coeficientes de las variables), el cálculo del ángulo entre dos planos se reduce al cálculo del ángulo entre sus vectores normales.

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

CONDICIONES DE PARALELISMO Y DE PERPENDICULARIDAD ENTRE PLANOS:

a) **para el paralelismo:** $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$
b) **para la perpendicularidad:** $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

INTERSECCIÓN ENTRE PLANOS

Dadas las ecuaciones de tres planos, resolver el problema de la intersección consiste en hallar las coordenadas del punto común a tres planos, si existe. Las posiciones relativas entre tres planos pueden ser:

a) Se cortan en un punto.
b) Son paralelos (al menos dos de ellos)
c) Son coincidentes.
d) Se cortan dos a dos.

El problema se resuelve conformando un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Las ecuaciones son las de los planos y las incógnitas son las coordenadas del punto de intersección. Sólo en el caso a) obtendremos única solución; en b) y d) el sistema resultará incompatible mientras que en c) habrá infinitas soluciones y el sistema resultará compatible indeterminado.

## LA RECTA EN $E_3$.

Una curva del espacio tridimensional debe describirse analíticamente mediante la intersección de dos superficies que se cortan según ella, y como veremos, en general, hay más manera de expresar mediante dos ecuaciones de superficies dicha intersección

## ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA.

Definimos una recta en el espacio tridimensional $E^3$ como la intersección de dos planos.

Si
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad (1)$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad (2)$$

son las ecuaciones de dos planos no paralelos ni coincidentes, el sistema formado por sus ecuaciones determina en su intersección la recta, resultando en consecuencia ser su ecuación general.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Para asegurarnos que las ecuaciones (1) y (2) no representan planos paralelos ni coincidentes debemos verificar que no sean proporcionales los números directores de ambos planos *(las componentes de sus vectores normales)*

## ECUACIÓN VECTORIAL, PARAMÉTRICAS Y CARTESIANAS SIMÉTRICAS DE LA RECTA EN $E_3$.

a) CONOCIDOS UN PUNTO Y EL VECTOR DIRECTOR

Sea $P_1(x_1; y_1; z_1)$ un punto de la recta y $\vec{d} = d_1\breve{i} + d_2\breve{j} + d_3\breve{k}$ el vector director.

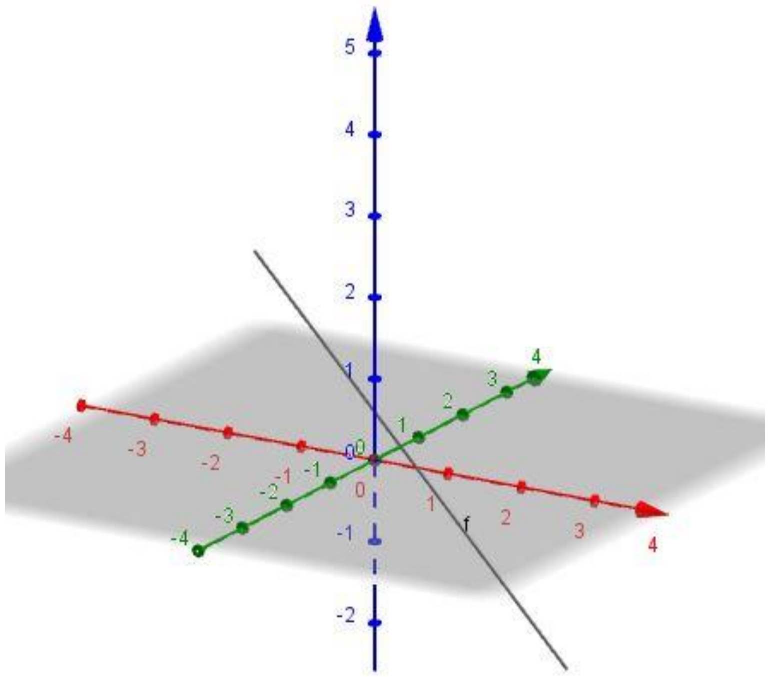
Si $P(x; y; z)$ es un punto genérico de la recta (se denomina así porque recorriéndola la genera), deberá verificarse:

$$O\vec{P} = O\vec{P_1} + P_1\vec{P} \qquad \text{ecuación vectorial de la recta.}$$

para la cual es :

$$O\vec{P} = x\breve{i} + y\breve{j} + z\breve{k}$$
$$O\vec{P_1} = x_1\breve{i} + y_1\breve{j} + z_1\breve{k}$$
$$P_1\vec{P} = \lambda \bullet \vec{d}$$

(para cualquier posición de P el vector $P_1\vec{P}$ se obtiene multiplicando a $\vec{d}$ por un escalar $\lambda$ ).



La ecuación vectorial puede escribirse:

$$x\breve{i} + y\breve{j} + z\breve{k} = x_1\breve{i} + y_1\breve{j} + z_1\breve{k} + \lambda\left(d_1\breve{i} + d_2\breve{j} + d_3\breve{k}\right)$$

$$(x_1; y_1; z_1) = (x_1; y_1; z_1) + \lambda(d_1; d_2; d_3)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

resultando:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda d_1 \\ \lambda d_2 \\ \lambda d_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda d_1 \\ x_2 + \lambda d_2 \\ x_3 + \lambda d_3 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
x &= x_1 + \lambda d_1 \\
y &= y_1 + \lambda d_2 \\
z &= z_1 + \lambda d_3
\end{aligned}
$$

llamadas **ecuaciones paramétricas** de la recta ya que permiten obtener la posición de distintos puntos de la misma en función de las coordenadas del punto conocido $P_1(x_1;y_1;z_1)$ y las componentes del vector director $(d_1;d_2;d_3)$ con solo asignar distintos valores de a $\lambda$, variable auxiliar denominada parámetro.

A partir de las ecuaciones paramétricas, despejando el parámetro $\lambda$ en cada una de ellas e igualando obtenemos:

que son las **ecuaciones cartesianas simétricas** de la recta en $E^3$, también llamadas ecuaciones canónicas de la recta.

b) CONOCIDOS DOS PUNTOS DE LA RECTA.

Si conocemos dos puntos de la recta: $P_1(x_1;y_1;z_1)$ y $P_2(x_2;y_2;z_2)$ podemos elegir como vector director $\vec{d} = P_1\vec{P}_2$ resultando:

$$\vec{d} = (x_2 - x_1)\breve{i} + (y_2 - y_1)\breve{j} + (z_2 - z_1)\breve{k}$$

y en consecuencia las ecuaciones cartesianas simétricas resultarán:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

OBTENCION DE LAS ECUACIONES CARTESIANAS SIMÉTRICAS, CONOCIDA LA ECUACION GENERAL.

Si

$$
\begin{cases}
A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (1) \\
A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (2)
\end{cases}
$$

es la **ecuación general de una recta**, para obtener las ecuaciones cartesianas simétricas necesitamos:

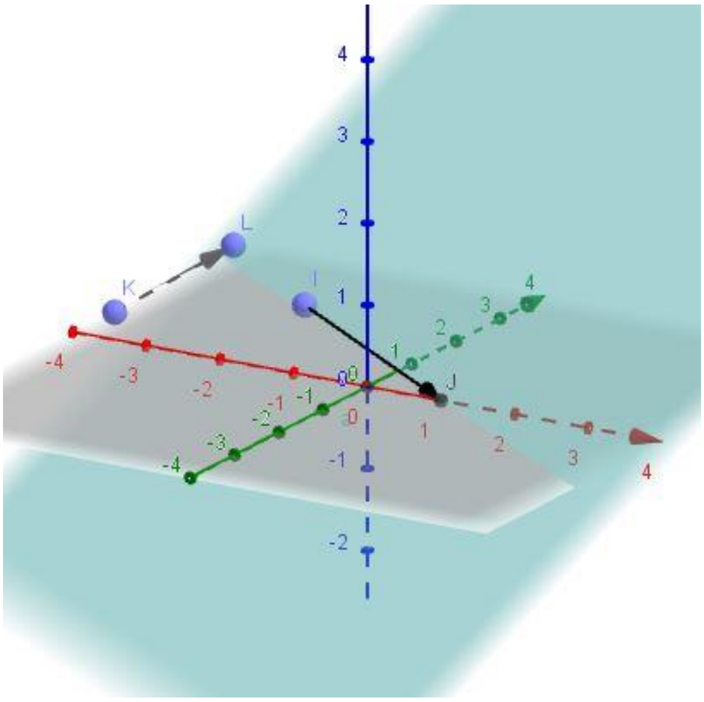
a) Conocer un punto de la recta y un vector director, o bien,
b) Conocer dos puntos.

Para conocer uno o más puntos de la recta intersección del sistema (1) , (2) fijamos una de las coordenadas, por ejemplo $z = z_0$ quedando el sistema:

$$
\begin{cases}
A_1x + B_1y = -C_1z_0 - D_1 \\
A_2x + B_2y = -C_2z_0 - D_2
\end{cases}
$$

resolviendo este sistema, la solución será $(x_0, y_0)$ que conjuntamente con $z_0$ prefijado nos da las coordenadas de un punto de la recta. Otro punto se obtendrá fijando un valor distinto para z y resolviendo nuevamente el sistema.

El vector director se obtiene fácilmente si tenemos en cuenta que $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ y $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ son vectores normales a los planos; su producto vectorial da un vector en la dirección de la recta intersección.




**PLANOS PROYECTANTES DE UNA RECTA.**

Se denominan planos proyectantes de una recta a aquellos que la contienen y son perpendiculares a los planos coordenados.

Los planos proyectantes son tres, pero son suficientes dos de ellos para identificar la recta que proyectan.

Sea la recta r de ecuaciones:

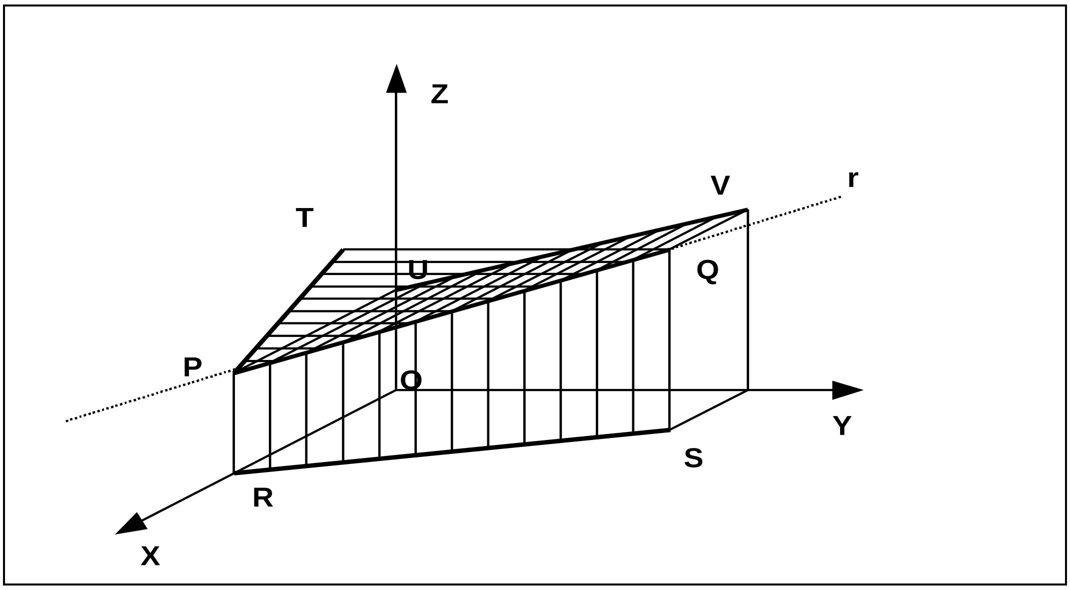
$$\frac{x - x_1}{d_1} = \frac{y - y_1}{d_2} = \frac{z - z_1}{d_3}$$

los planos proyectantes son:

$$\frac{x - x_1}{d_1} = \frac{y - y_1}{d_2} \quad (1)\text{; plano proyectante sobre el plano xy (paralelo al eje z)}$$

$$\frac{x - x_1}{d_1} = \frac{z - z_1}{d_3} \quad (2)\text{; plano proyectante sobre el plano xz (paralelo al eje y)}$$

$$\frac{y - y_1}{d_2} = \frac{z - z_1}{d_3} \quad (3)\text{; plano proyectante sobre el plano yz (paralelo al eje x)}$$




## ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO.

Sea la recta de ecuaciones: $\frac{x-x_1}{d_1}=\frac{y-y_1}{d_2}=\frac{z-z_1}{d_3}$ y el plano de ecuación: $Ax+By+Cz+D=0$

resultarán:

$\vec{d}=d_1\breve{i}+d_2\breve{j}+d_3\breve{k}$ (vector director de la recta)

$\vec{n}=A\breve{i}+B\breve{j}+C\breve{k}$ (vector normal del plano)

si $\alpha$ es el ángulo entre la recta y el plano, podemos escribir ( ángulo entre dos vectores ):

$$\cos\beta = sen\alpha = \frac{Ad_1+Bd_2+Cd_3}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\bullet\sqrt{d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2}}$$

## INTERSECCIÓN ENTRE RECTA Y PLANO.

Si las ecuaciones de la recta y el plano son respectivamente:

$$\frac{x-x_1}{d_1}=\frac{y-y_1}{d_2}=\frac{z-z_1}{d_3}$$
$$Ax+By+Cz+D=0$$

de las ecuaciones de la recta, volvemos a las ecuaciones paramétricas

$$x = x_1 + \lambda d_1$$
$$y = y_1 + \lambda d_2$$
$$z = z_1 + \lambda d_3$$

y reemplazamos estos valores en la ecuación del plano:

$$A(x_1 + \lambda d_1) + B(y_1 + \lambda d_2) + C(z_1 + \lambda d_3) + D = 0$$

ecuación que queda expresada en la variable $\lambda$. Despejando $\lambda$ y reemplazando el valor hallado en las ecuaciones paramétricas obtenemos las coordenadas del punto de intersección.

**ÁNGULO ENTRE RECTAS.**

El ángulo entre dos rectas se obtiene calculando el ángulo que forman sus vectores directores. Por este motivo las condiciones de paralelismo y de perpendicularidad entre rectas se obtienen por analogía a las condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre vectores.

Resultarán:

$\vec{d} = d_1\breve{i} + d_2\breve{j} + d_3\breve{k}$ ( vector director de la recta )

$\vec{n} = A\breve{i} + B\breve{j} + C\breve{k}$ ( vector normal del plano )

si $\alpha$ es el ángulo entre la recta y el plano, podemos escribir ( ángulo entre dos vectores ):

$$\cos\beta = sen\alpha = \frac{Ad_1 + Bd_2 + Cd_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \bullet \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}}$$

INTERSECCION DE RECTAS EN EL ESPACIO.

Sean las rectas $r_1$ y $r_2$ dadas respectivamente por las ecuaciones:

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3} \quad \text{y} \quad \frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{b_3}$$

pueden presentarse cuatro posiciones particulares:

a) que las rectas sean paralelas
b) que sean coincidentes (distintas ecuaciones de la misma recta)
c) que se corten
d) que se crucen (en este caso se dice que son alabeadas)

En los casos a) y b) los vectores directores son paralelos, lo que se verifica porque se cumple la proporcionalidad entre las componentes homólogas:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

a los efectos de dilucidad si nos encontramos en el caso a) o en el b) podemos probar en una cualquiera de las dos ecuaciones si el punto conocido de la otra, la satisface: por ejemplo si cambiamos las variables de la segunda recta por $x_1; y_1; z_1$ respectivamente y la ecuación se satisface, al ser los vectores directores proporcionales, las rectas serán “coincidentes”; si por el contrario al proceder como hemos descrito la segunda ecuación no se satisface, podemos asegurar que, con vectores directores proporcionales no hay punto común, es decir, las rectas son paralelas.

En los casos c) y d) los vectores directores no son paralelos ($\vec{b} \neq \lambda \cdot \vec{a}$); en estas condiciones las rectas se cortarán si los vectores directores y el vector subtendido entre los dos puntos conocidos pertenecen a un mismo plano. Para que ello ocurra, el producto mixto (que permite medir la coplanaridad de tres vectores) debe ser nulo,
o sea que si

$$\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right) \bullet \left(\vec{a} x \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

las rectas se cortan y, en estas condiciones las coordenadas del punto de intersección se encuentran resolviendo un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas formado por las ecuaciones de dos de los planos proyectantes de una de las rectas y un plano proyectante de la otra. Dicho sistema, entre otros posibles puede estar formado de la siguiente manera;

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{a_2} \\ \dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{z - z_1}{a_3} \\ \dfrac{x - x_2}{b_1} = \dfrac{y - y_2}{b_2} \end{cases}$$

y será necesariamente compatible ya que hemos demostrado que las rectas tienen vectores oblicuos, estando ambos y el vector construido con los dos puntos conocidos, en el mismo plano (el punto de intersección es único)

Si el caso que se nos presenta tiene los vectores oblicuos pero no se cumple la condición de producto mixto nulo, es decir que

$$\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right) \bullet \left(\vec{a} x \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0;$$

los tres vectores no son coplanares, y en consecuencia las rectas resultan alabeadas. Cuando esto sucede, resulta de interés calcular la;

Para complementar la lectura de esta breve teoría se sugiere ver en Youtube los siguientes videos explicativos:

- https://www.youtube.com/watch?v=0w3zUjLky4M
- https://www.youtube.com/watch?v=d8vwDEiGm7U
- https://www.youtube.com/watch?v=deS3PstD6ig

Bibliografía obligatoria y recomendada:


- Armando Rojo: Álgebra I y II
- Hector Di Caro: Álgebra y Geometría Analítica.
- Sagastume Berra, G. Fernández: Álgebra y Cálculo Numérico.
- Lentin, Rivaud: Álgebra Moderna
- Donato Di Pietro: Geometría Analítica.
- Ch. H. Lehmann Geometría Analítica.
- Louis Leithold El Cálculo con Geometría
- P. Smith, A. Gale Elementos de G. Analítica