Matrices

Una matriz es un conjunto de números colocados en una determinada disposición, ordenados en filas y columnas. Es una yuxtaposición de vectores fila y vectores columna.
Las líneas horizontales de una matriz se denominan filas y las líneas verticales se denominan columnas.
Las matrices se las nombra con letras mayúsculas y los elementos de las mismas con letras minúsculas.
Cuando una matriz contiene m filas y n columnas se dice que es de orden m x n. Los elementos de una matriz se suelen encerrar entre paréntesis o corchetes rectos.

Las siguientes matrices son, respectivamente, de orden 3 x 3, 3 x 2, 3 x 4 y 2 x 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \; ; \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada
Es la que tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir de orden n x n o simplemente de orden n.

Matriz diagonal
Es una matriz cuadrada cuyos elementos son todos nulos salvo los de la diagonal principal, es decir la diagonal que va desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha. (a_{ij} con i=j)

Vector fila
Es una matriz de una sola fila y varias columnas. Por ejemplo, una matriz 1 x 7 es un vector fila de longitud 7.

Vector columna
Es una matriz de varias filas y una sola columna. Por ejemplo, una matriz 20 x 1 es un vector columna de longitud 20.

Matriz triangular inferior
Es una matriz cuyos elementos por encima de la diagonal principal son todos nulos.

Matriz triangular superior
Es una matriz cuyos elementos por debajo de la diagonal principal son todos nulos.

Las siguientes matrices son respetivamente vector fila, vector columna, matriz triangular superior, matriz triangular inferior y matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 11 & 0 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

De manera general, una matriz de m filas y n columnas cualquiera se escribe de la forma siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1i} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix} \quad o\ bien\ A(ij) = \text{con } 1 \le i \le m \text{ y con } 1 \le j \le n$$

Obsérvese que el primer subíndice de cada elemento representa el número de la fila y el segundo el número de la columna a la que pertenece dicho elemento. Así a_{ij} es el elemento que está en la intersección de la fila i con la columna j

Suma y resta de matrices

Sean A y B dos matrices del mismo orden, m x n.
La suma A + B es otra matriz de orden m x n cuyos elementos son la suma de los elementos homólogos de las matrices a sumar.
La resta A - B se define de forma análoga. (Suma algebraica, suma con signo)

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

C = A + B = $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Producto de una matriz por un escalar o número

Dada una matriz A de orden m x n y un número c, el producto c . A es una nueva matriz m x n que se calcula multiplicando cada elemento de A por el número c.

Ejemplo

Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ y el escalar c = 2 ; la operación

$$2\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$$

Producto de matrices.

El producto de dos matrices se puede definir sólo si el número de columnas de la matriz izquierda es el mismo que el número de filas de la matriz derecha. Si A es una matriz m x n y B es una matriz n x k, entonces su producto matricial A x B es la matriz m x k (m filas, k columnas) dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^{n} a_{1p}b_{p1} & \sum_{p=1}^{n} a_{1p}b_{p2} & \dots & \sum_{p=1}^{n} a_{1p}b_{pk} \\ \sum_{p=1}^{n} a_{2p}b_{p1} & \sum_{p=1}^{n} a_{2p}b_{p2} & \dots & \sum_{p=1}^{n} a_{2p}b_{pk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{p=1}^{n} a_{mp}b_{p1} & \sum_{p=1}^{n} a_{mp}b_{p2} & \dots & \sum_{p=1}^{n} a_{mp}b_{pk} \end{bmatrix}.$$

Disposición conceptual para el producto:

Si queremos multiplicar A_{2x3} x B_{3x2}, debemos obtener C_{2x2}; sean entonces:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

º

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

en la intersección de la fila 1 de la matriz A con la columna 1 de la matriz B se encuentra el elemento c_{11} cuya expresión se obtiene haciendo el producto escalar:

$c_{11} = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + a_{13}\, b_{31}$; con análogo razonamiento :

$c_{12} = a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22} + a_{13}\, b_{32}$

$c_{21} = a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} + a_{23}\, b_{31}$

$c_{22} = a_{21}\, b_{12} + a_{22}\, b_{22} + a_{23}\, b_{32}$

Ejemplo

Sean $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

A_{2x3} x B_{3x2} = C_{2x2} = $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

En el producto matricial, el orden es fundamental: Puede tener sentido el producto A x B y no tenerlo el producto B x A. Pero, incluso en el caso de matrices cuadradas del mismo orden, en que tienen sentido ambos productos (A x B y B x A), en general el resultado no es el mismo. O como el ejemplo anterior en donde ambos productos puede efectuarse, pero el resultado no es el mismo.
Es decir, el producto matricial no es conmutativo: A x B ≠ B x A

Ejemplo

Sean $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

A_{2x3} x B_{3x2} = C_{2x2} = $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

B_{3x2} x A_{2x3} = C_{3x3} = $\begin{pmatrix} 11 & 4 & 14 \\ -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

DETERMINANTES

El determinante es un número que está asociado a toda matriz cuadrada. (No existe el determinante de una matriz que no sea cuadrada).
Es una función asociada a una matriz. Cuyo dominio es el conjunto de las matrices cuadradas y cuya imagen es el conjunto de los números reales.

<u>Determinante de una matriz de orden 2.</u>

Sea una matriz cuadrada de orden 2: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ Se llama determinante de la matriz A al número real obtenido de la siguiente forma:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}.a_{22}-a_{12}.a_{21}$$

es decir, la diferencia entre los productos cruzados de sus elementos. El valor obtenido se denota también por det(A).

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3.4 - 1.(-2) = 14$

Determinante de una matriz de orden 3

Sea una matriz cuadrada de orden 3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ Se llama determinante de la matriz *A* al número real obtenido de la siguiente forma:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{23}.a_{32}.a_{11} - a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 1.5.10 + (2).6.(-7) + 3.4.8 - 3.5.(-7) - 6.8.1 - 10.4.(-2) = 367$$

Para recordar la definición de determinante de tercer orden, se utiliza la **regla de Sarrus**:

Productos positivos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ Productos negativos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Propiedades generales de los determinantes.

A continuación, vamos a enunciar una serie de propiedades que cumplen los determinantes de una matriz cuadrada, independientemente del orden que tengan.

1ª) El determinante de una matriz no varía si se cambian filas por columnas, es decir, el determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz traspuesta.

Det(A) = Det(A^t)

2ª) Si una matriz tiene una fila nula, su determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3ª) El determinante de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{b} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{c} \end{vmatrix} = abc$$

4ª) Si se intercambian entre si dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo

$$Det(A^1, A^2, A^3) = -Det(A^2, A^1, A^3)$$

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ como puede comprobarse.

5ª) Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales su valor es cero.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ como puede comprobarse.

6ª) Si se multiplica una fila o columna por un número el determinante queda multiplicado por dicho número.

$$Det(kA^1, A^2, A^3) = k.Det(A^1, A^2, A^3)$$

7ª) Si un determinante tiene dos filas o columnas proporcionales su valor es cero:

$$Det(A^1, kA^1, A^3) = k.Det(A^1, A^1, A^3) = 0$$

8ª) Si una fila o columna puede descomponerse en suma de otras dos, por ejemplo, $A^1 = B + C$, entonces

$$Det(B + C, A^2, A^3) = Det(B, A^2, A^3) + Det(C, A^2, A^3)$$

9ª) Si a una fila o columna se le suma una combinación lineal de las restantes, el valor del determinante no varía.

$$Det(A^1, A^2, A^3) = Det(A^1 + \alpha A^2 + \beta A^3, A^2, A^3)$$

10ª) Si una fila o columna es combinación lineal de las restantes, el valor del determinante es cero, y viceversa.

$$Det(A^1, A^2, \alpha A^1 + \beta A^2) = Det(A^1, A^2, \alpha A^1) + Det(A^1, A^2, \beta A^2) = 0 + 0 = 0$$

11ª) El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes:
$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Determinantes de orden mayor que 3.

Previamente, vamos a definir dos conceptos que nos servirán para calcular el determinante de una matriz cuadrada de orden mayor que 3.

Definición: Dada una matriz cuadrada de orden *n* y uno de sus elementos a_{ij}, se llama **menor complementario** de dicho elemento, y se representa α_{ij} o M_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de suprimir la fila *i* y la columna *j*.

Ejemplo: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, el menor complementario del elemento $a_{23}=3$ se calcula de la siguiente forma:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cancel{0} \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{3} \\ 2 & 1 & \cancel{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

Definición: Dada una matriz cuadrada de orden *n* y uno de sus elementos a_{ij}, se llama **Adjunto de a_{ij}** *y* se representa por A_{ij} al menor complementario precedido del signo + o – según que *i + j* sea par o impar. O también:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Entonces, el adjunto del elemento $a_{23}=3$ será $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$.

Y el adjunto del elemento $a_{22}=0$ será $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$.

Teorema:

El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de una columna o fila multiplicados por sus correspondientes adjuntos.

Es decir, si $A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ \dots\dots\dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ \dots\dots\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ \dots\dots\dots a_{mn} \end{pmatrix}$ y nos fijamos, por ejemplo, en los elementos de la fila 2ª, se verifica:

$$|A| = a_{21}.A_{21} + a_{22}A_{22} + \dots\dots + a_{2n}A_{2n}$$

(Nota: Podíamos haber elegido otra fila o cualquier columna). Por tanto, **para calcular el determinante de una matriz cuadrada de orden mayor que 3, basta multiplicar los elementos de una fila o columna por sus adjuntos correspondientes**.

<u>Ejemplo:</u>

Vamos a calcular el determinante de la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Para ello nos fijamos en cualquier fila o cualquier columna (es más práctico seleccionar una fila o columna que tenga muchos ceros ya que nos ahorra muchos cálculos). En este caso, elegimos la columna 2ª y hemos aplicado el teorema:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42} == 0A_{12} + 0A_{22} + (-1)A_{32} + 1A_{42} = (-1)A_{32} + 1A_{42}$$

Por tanto, todo se reduce a calcular $A_{32} \quad y \quad A_{42}$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(-2) = 2 \qquad A_{42} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +(-4) = -4$$

Luego tendremos:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)A_{32} + 1A_{42} = (-1) \bullet 2 + 1 \bullet (-4) = -2 - 4 = -6$$

Cuando tenemos que calcular el determinante de una matriz que no tenga ceros, lo ideal es transformarla en otra que sí los tenga ya que el determinante no se verá afectado, pero realizaremos antes el cálculo.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

En este caso, tendríamos que desarrollar por la línea que queramos, pero deberíamos hallar siempre cuatro adjuntos de orden 3.

Sin embargo, haciendo uso de la propiedad 9ª de los determinantes *(Si a una fila o columna se le suma una combinación lineal de las restantes, el valor del determinante no varía*), podemos obtener otra matriz cuyo determinante es más sencillo de calcular.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{f_3\acute{}=f_3-f_4}{\overset{1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

y ahora ya desarrollamos por los elementos de la fila 3ª por lo que solo tendremos que calcular el adjunto A_{34}

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{f_3\acute{}=f_3-f_4}{\overset{1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)A_{34} = (-1)(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

(**Nota**: En general, el cálculo de un determinante de cualquier orden se puede reducir al de un determinante de un orden inferior, desarrollándolo por los elementos de una fila o columna. Así, por ejemplo, el cálculo de un determinante de orden 4 se puede reducir al cálculo de, a lo sumo, cuatro determinantes de orden 3)

Aplicaciones de los determinantes.

Aunque otras de las aplicaciones de los determinantes las vamos a ver en el siguiente tema, aquí vamos a destacar dos aplicaciones de los determinantes que son:

- Cálculo de la matriz inversa de una matriz cuadrada
- Cálculo del rango de una matriz cualquiera

<u>Cálculo de la matriz inversa de una matriz cuadrada a través de determinantes.</u>

Vamos a ver cómo podemos calcular la inversa de una matriz cuadrada ayudándonos de los determinantes. Pero previamente vamos a definir el concepto de matriz adjunta.

<u>Definición</u>: Dada una matriz cuadrada A, llamamos matriz **adjunta de A**, y la representamos por **adj A** a la matriz formada por los adjuntos de la matriz A.

$$adjA = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Los adjuntos de los nueve elementos de *A* son:

$A_{11} = + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -17 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$

$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$

Por tanto, la matriz adj A será: $adjA = \begin{pmatrix} -17 & 4 & 6 \\ -11 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Para toda matriz cuadrada *A*, se verifica que $A \cdot (\text{adj } A)^t = (\text{adj } A)^t \cdot A = |A| \cdot I$

Puede comprobarse con la matriz anterior: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ en la que $|A| = -15$

$A \cdot (\text{adj } A)^t \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} = |A| \cdot I$

Es decir, el producto de la matriz A por la traspuesta de su adjunta, nos da la matriz identidad I multiplicada por el determinante de A.

Es muy interesante ya que si $|A| \neq 0$, podemos concluir que:

$A \cdot \frac{(adjA)^t}{|A|} = I$ por tanto, $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adjA)^t}$

Resumiendo, para calcular la matriz inversa se siguen los siguientes pasos:

1. Se halla el determinante de la matriz A. Si es cero no existe inversa.
2. Se hallan los adjuntos de la matriz dada, para obtener la matriz adj A.

3. Se forma la matriz traspuesta de la matriz adjunta.
4. Se divide la matriz obtenida por el determinante de A.

Ejemplo:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.- Hallamos su determinante.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 8 + 0 - 6 - 0 - 2 = -15 \neq 0.$$

Puesto que es distinto de 0, tiene inversa.

2.- Ahora calculamos la matriz adjunta. Hay que calcular los adjuntos de todos sus elementos. Sabemos, por haberlo hallado anteriormente, que dicha matriz es:

$$adjA = \begin{pmatrix} -17 & 4 & 6 \\ -11 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

3.- Calculamos su traspuesta:

$$(adjA)^t = \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

4.- Por último, dividimos por el determinante de A:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adjA)^t = \frac{1}{-15}\begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/15 & 11/15 & -1/15 \\ -4/15 & -7/15 & 2/15 \\ -6/15 & -3/15 & 3/15 \end{pmatrix}$$

Sistemas lineales de ecuaciones

Una ecuación lineal (sistema de orden 1) es de la forma: ax = b; donde a y b son números dados y x es la incógnita a determinar.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales que comparten las mismas incógnitas.
Un sistema de ecuaciones de orden 2 es de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

donde a, b, c, d, e, f son números dados y x e y son las incógnitas.

Cuando hay más de 3 o 4 ecuaciones y/o incógnitas, se suele utilizar una notación con subíndices para designar tanto las incógnitas como los coeficientes. Así, un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas se representa, de forma general:

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3\ + \ldots\ldots + a_{1n}\ x_n = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3\ + \ldots\ldots + a_{2n}\ x_n = b_2 \\ a_{m1}\ x_1 + a_{m2}\ x_2 + a_{m3}\ x_3 + \ldots\ldots + a_{mn}\ x_n = b_m \end{cases}$$

Este sistema se puede escribir de forma equivalente utilizando notación matricial, que es, en general, más fácil de escribir:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Llamando A a la matriz m x n de los coeficientes del sistema, x al vector columna de longitud n de las incógnitas y b al vector columna de longitud m del segundo miembro, el sistema de ecuaciones anterior se puede finalmente escribir en la forma más resumida:

Ax = b

Una solución del sistema es un conjunto de n valores (ordenados) tales que, al sustituir las incógnitas por estos valores, las ecuaciones se convierten en identidades. Colocando estos valores en forma de vector columna, x de longitud n, se tiene, obviamente, una solución del sistema escrito en forma matricial. Por ello se suele hablar de vector solución

Los sistemas lineales no siempre tienen solución. Si un sistema no tiene solución, se dice que es incompatible
De hecho, en relación con el número de soluciones de un sistema lineal de ecuaciones, sólo pueden darse los tres casos siguientes:

1. No tener ninguna solución: se dice que el sistema es incompatible.
2. Tener una única solución: el sistema es compatible determinado.
3. Tener infinitas soluciones: el sistema es compatible indeterminado.

Resolución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

Sea el sistema :

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 = b_1 \ \ (1) \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3 = b_2 \ \ (2) \\ a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 = b_3 \ \ (3) \end{cases}$$

En este caso el método consiste en tomar cualquiera de las ecuaciones (por ejemplo la (1)) y eliminar la incógnita x_1 primero con la ecuación (2) y luego, independientemente, con la ecuación (3) transformando el sistema original en uno equivalente con una ecuación en tres incógnitas y las otras con dos incógnitas.

De este nuevo sistema se toman las ecuaciones que tienen dos incógnitas y se lo transforma siguiendo el procedimiento ya descripto en otro sistema equivalente, con una ecuación en dos incógnitas y la otra solo en una.

Del resultado de esta última operación obtendremos un sistema equivalente al original, con la primera ecuación en tres incógnitas, la segunda en dos y la tercera en solo una, lo que nos permite obtener el conjunto solución.

<u>Ejemplo</u>

Sea el sistema

$$\begin{cases} 2\,x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - 2\,x_3 = -3 \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

Adoptando la disposición práctica descripta:

	2	-1	1	5
	1	1	-2	-3
	3	2	-1	8
repetimos la 1º ec.	2	-1	1	5
	0	3	-5	-11
	0	7	-5	1
repetimos la 1º y la 2º ec. del paso anterior.	2	-1	1	5
	0	3	-5	-11
	0	0	20	80

El sistema equivalente

$$\begin{cases} 2\,x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 3\,x_2 - 5\,x_3 = -11 \\ 20\,x_3 = 80 \end{cases}$$

se obtuvo resolviendo, por ejemplo, para el elemento **-5** que es el transformado de **-1** el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

De: $20\,x_3 = 80$ $\boxed{x_3 = 4}$

De: $3\,x_2 - 5 \,.\, 4 = -11$

$3\,x_2 = 20 - 11$

$\boxed{x_2 = 3}$

y por último de: $2\,x_1 - 3 + 4 = 5$

$2\,x_1 = 5 + 3 - 4$

$\boxed{\mathbf{x_1 = 2}}$

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} 3\,x_1 - 5\,x_2 + 11\,x_3 = 7 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + 8\,x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 9\,x_3 = -3 \end{cases}$$

3	5	11	7
2	3	8	4
1	-1	9	-3
3	5	11	7
0	-1	2	-2
0	-8	16	-16
2	5	11	7
0	-1	2	-2
0	0	0	0

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} 3\,x_1 + 5\,x_2 + 11\,x_3 = 7 \\ x_2 + 2\,x_3 = -2 \\ 0.x_3 = 0 \end{cases}$$

El sistema admite infinitas soluciones, que se obtienen dando valores arbitrarios a x_3: por esa razón es **compatible indeterminado**.

Ejemplo 3:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & -4 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & -6 & -2 \\ \hline 4 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -14 & 22 & 32 \\ 0 & 14 & -22 & -20 \\ \hline 4 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -14 & 22 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & -168 \end{array}$$

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} 4x_1 + 1x_2 - 1\ x_3 = 6 \\ \quad 14x_2 + 22\ x_3 = 32 \\ \qquad 0x_3 = -168 \end{cases}$$

El sistema no tiene solución (no la tiene $0 \cdot x_3 = -168$) y por lo tanto se denomina **incompatible**.

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por inversión de matrices.

Sea el sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 = b_1 & (1) \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3 = b_2 & (2) \\ a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 = b_3 & (3) \end{cases}$$

podemos escribirlo en forma matricial si hacemos el producto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ del cual resulta la igualdad:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

designando:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} ;\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ;\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

simbolizamos:

$$A \cdot X = B$$

Siendo A y B matrices conocidas, resolver el sistema consiste en encontrar los elementos de la matriz X, lo que se consigue premultiplicando (multiplicando desde la izquierda) ambos miembros de la igualdad por la matriz inversa de A, que simbolizamos como la matriz A^{-1}.

En efecto, de:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

teniendo en cuenta de acuerdo con la definición de matriz inversa que $A^{-1} \cdot A = I$ y que I es el elemento neutro en el producto de matrices, resulta:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

lo que significa que, para obtener la matriz de las incógnitas (matriz solución) basta con premultiplicar la matriz de los términos independientes por la matriz inversa de la matriz de los coeficientes de las incógnitas.

Si recordamos que $A^{-1} = \frac{Adj^t}{|A|}$, sólo podremos resolver por inversión de matrices aquellos sistemas en los cuales el determinante asociado a la matriz de los coeficientes de las incógnitas sea distinto de cero, es decir solamente los sistemas que sean compatibles determinados.

Ejemplo

Hallar la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y + z = \ \ 2 \\ x + 2y - z = \ \ 3 \\ 3x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

en forma matricial el sistema se escribe:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

como sabemos, pueden efectuarse operaciones elementales sobre el sistema de ecuaciones o sobre la matriz ampliada (ver método de eliminación gaussiana) o bien, si existe, calcular la inversa de

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y luego, premultiplicar la matriz de los términos independientes por

$$A^{-1} = \frac{Adj^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}}{10}$$ **;** o sea:

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

o sea; x = 2; y = -1; z = -3

Teorema de Cramer.

Como hemos visto al resolver sistemas de ecuaciones lineales por el método matricial, la matriz de las incógnitas se obtiene mediante la expresión: $X = A^{-1} \cdot B$, la que teniendo en cuenta $A^{-1} = \frac{Adj^t}{|A|}$

puede escribirse: $X = \frac{Adj^t}{|A|} \cdot B$ que se puede desarrollar para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, sin que la demostración pierda validez general de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} |A_{11}| & |A_{21}| & |A_{31}| \\ |A_{12}| & |A_{22}| & |A_{32}| \\ |A_{13}| & |A_{23}| & |A_{33}| \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

expresión de la cual se obtienen la siguiente igualdad:

$$x_1 = \frac{|A_{11}| \cdot b_1 + |A_{21}| \cdot b_2 + |A_{31}| \cdot b_3}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

que se lee: “la incógnita x_1 se obtiene como el cociente entre dos determinantes: el del denominador es el asociado a la matriz de los coeficientes de las incógnitas mientas que el del numerador es el mismo determinante en el cual se ha reemplazado la columna de los coeficientes de x_1 por los términos independientes”

Con similar razonamiento:

$$x_2 = \frac{|A_{12}| \cdot b_1 + |A_{22}| \cdot b_2 + |A_{32}| \cdot b_3}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

y

$$x_3 = \frac{|A_{13}|\cdot b_1 + |A_{23}|\cdot b_2 + |A_{33}|\cdot b_3}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

lo expresado para la incógnita x_1 puede generalizarse de la siguiente manera: ”las incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales pueden obtenerse efectuando el cociente entre dos determinantes: el del denominador es en todos los casos el asociado a la matriz de los coeficientes de las incógnitas mientras que el del numerador es el mismo determinante en el cual se ha reemplazado la columna de los coeficientes de la incógnita que se quiere calcular por los términos independientes”.

Ejemplo:

Hallar la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y + z = \ \ 2 \\ x + 2y - z = \ \ 3 \\ 3x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = 2 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{10} = -1 \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{10} = -3$$

Sistemas homogéneos.

Reciben este nombre los sistemas de ecuaciones lineales que tienen todos los términos independientes nulos. Tienen el aspecto:

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 = 0 \ \ (1) \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3 = 0 \ \ (2) \\ a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 = 0 \ \ (3) \end{cases}$$

Como ejemplos podemos citar para el espacio dos la intersección entre dos rectas que pasan por el origen de coordenadas y para el espacio tridimensional, la intersección de tres planos que pasan por el origen de coordenadas.

Se resuelven por cualquier método de los desarrollados; muchas veces sólo se necesita saber si el sistema es compatible determinado o compatible indeterminado, lo que se logra resolviendo el determinante asociado a la matriz de los coeficientes de las incógnitas. Si dicho determinante es distinto de cero, las tres ecuaciones son independientes y la solución es única (la trivial): si por el contrario el determinante resulta nulo, el sistema resulta compatible indeterminado (soluciones múltiples)

Resolución Matricial de los sistemas de ecuaciones lineales incompatibles. (aplicación del concepto de Matriz Pseudoinversa).

Sea el sistema de ecuaciones independientes (por lo tanto, incompatible)

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = q_1 & (1) \\ a_2x_1 + b_2x_2 = q_2 & (2) \\ a_3x_1 + b_3x_2 = q_3 & (3) \end{cases}$$

que puede escribirse en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

o simbólicamente

$$A \cdot x = q$$

Como la matriz A tiene mayor número de filas que de columnas sólo resulta posible definir su matriz inversa (*en este caso, **pseudoinversa***) por la izquierda.

Para despejar la matriz x se premultiplican ambos miembros de la igualdad anterior por la matriz traspuesta de A :

$$A^t \cdot A \cdot x = A^t \cdot q \quad (5)$$

<u>Nota</u>:

"para el caso que nos ocupa $A^t{}_{(2x3)} \cdot A_{(3x2)} = M_{(2x2)}$"

"si hubiéramos hecho $A_{(3x2)} \cdot A^t{}_{(2x3)} = M_{(3x3)}$ resulta **siempre** singular (no admite matriz inversa)"

Como la matriz $A^t \cdot A$ es cuadrada, si su determinante asociado es distinto de cero, admite matriz inversa $\left(A^t \cdot A\right)^{-1}$; premultiplicando por esta matriz ambos miembros de (5):

$$\left(A^t \cdot A\right)^{-1} \cdot \left(A^t \cdot A\right) \cdot x = \left(A^t \cdot A\right)^{-1} \cdot A^t \cdot q \quad (6)$$

siendo $\left(A^t \cdot A\right)^{-1} \cdot \left(A^t \cdot A\right) = I$ resulta:

$$x = \left(A^t \cdot A\right)^{-1} \cdot A^t \cdot q$$

expresión en la cual $\left(A^t \cdot A\right)^{-1} \cdot A^t = L$ (matriz pseudoinversa por la izquierda)

<u>Ejemplo:</u>

Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 3/2 \\ x_1 + x_2 = 1/2 \end{cases}$$

por el aspecto de la primera y última ecuaciones con primeros miembros iguales y segundos miembros distintos, el sistema es incompatible.

Escribimos el sistema del ejemplo en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

premultiplicamos ambos miembros por $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

que operando nos conduce a:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenido este sistema de ecuaciones que, por tener igual número de ecuaciones e incógnitas, resulta compatible determinado, el cálculo puede continuarse de las siguientes maneras;

a) **<u>resolver por inversión de matrices</u>.**

Retomemos la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ que obtuvimos después de premultiplicar ambos miembros de la ecuación matricial del sistema por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y operar. Premultiplicando ahora ambos miembros por la inversa de la matriz de los coeficientes obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & .3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/8 \\ -3/8 \end{pmatrix}$$

resultando $x_1 = 9/8$ y $x_2 = -3/8$

Bibliografía obligatoria y recomendada:

- Armando Rojo: Álgebra I y II
- Hector Di Caro: Álgebra y Geometría Analítica.
- Sagastume Berra, G. Fernández: Álgebra y Cálculo Numérico.
- Lentin, Rivaud: Álgebra Moderna
- Donato Di Pietro: Geometría Analítica.
- Ch. H. Lehmann Geometría Analítica.
- Louis Leithold El Cálculo con Geometría
- P. Smith, A. Gale Elementos de G. Analítica