

Para los antiguos geómetras griegos como Euclides (300 A.C.) y Arquímedes (287-212 A.C.), una sección cónica (parábola, elipse e hipérbola) era una curva en el espacio, la cual resultaba de la intersección de un plano con un cono de dos ramas, siempre y cuando el plano no pasara por el vértice del cono. En caso de que lo hiciera daba lugar a las llamadas cónicas degeneradas (un punto (el vértice del cono), una recta (un generatriz del cono) o un par de rectas que se intersecan (un par de generatrices)).

Los griegos en su tiempo se dedicaron con perseverancia al estudio de sus propiedades geométricas. Sin embargo, es hasta inicios del siglo XVII (1637), con el descubrimiento casi de manera independiente de la geometría analítica, por parte de Descartes y Fermat, que se toma conciencia de su utilidad y pasan a ocupar un lugar de privilegio, adicionalmente Kepler descubrió (y Newton explicó) que las órbitas de los planetas y otros cuerpos en el sistema solar son secciones cónicas.

La geometría analítica plana usa el álgebra y el cálculo para estudiar las propiedades de las curvas en el plano xy . Su idea fundamental es establecer una correspondencia entre una ecuación $F(x; y) = 0$ y su lugar geométrico. Una de las ideas centrales de la geometría analítica es, dado un lugar geométrico o una curva, sus propiedades pueden deducirse en forma algebraica o analítica a partir de su ecuación $F(x; y) = 0$.

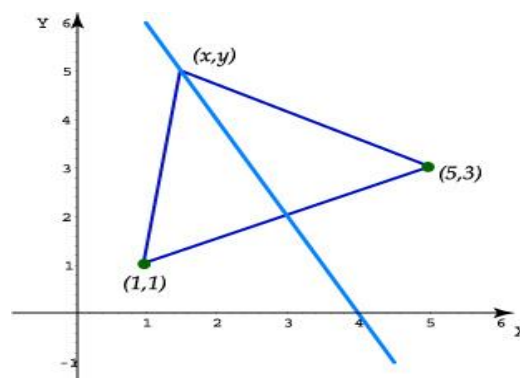
En la siguiente figura se muestran las secciones cónicas: parábola, elipse e hipérbola, tal y como fueron definidas por los antiguos geómetras griegos.



Lugares geométricos

El conjunto de todos los puntos $(x; y)$ en el plano cuyas coordenadas satisfacen una propiedad, que puede estar dada por una ecuación $F(x; y) = 0$, se conoce como lugar geométrico.

Por ejemplo: Compruebe que el conjunto de todos los puntos $P = (x; y)$ que equidistan de los puntos $A = (1;1)$ y $B = (5;3)$ es la mediatriz del segmento de recta que une a estos dos puntos.



El punto $P = (x; y)$ equidista de $A = (1;1)$ y $B = (5;3)$ si y sólo si $d(P;A) = d(P;B)$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2}$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-5)^2 + (y-3)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9$$

$$-2x - 2y + 2 = -10x - 6y + 34$$

$$8x + 4y = 32$$

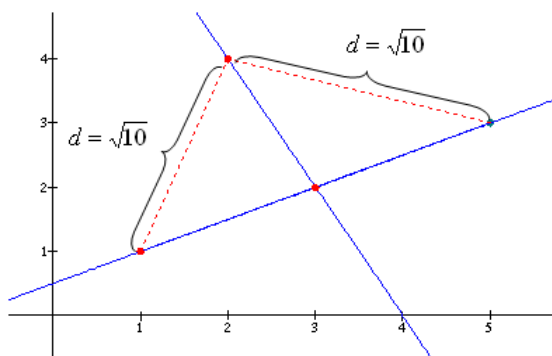
$$2x + y = 8$$

$$y = -2x + 8$$

Por lo tanto, el lugar geométrico es la recta $y = -2x + 8$ cuya pendiente es -2 . La recta que pasa por los puntos $A = (1;1)$ y $B = (5;3)$ tiene ecuación

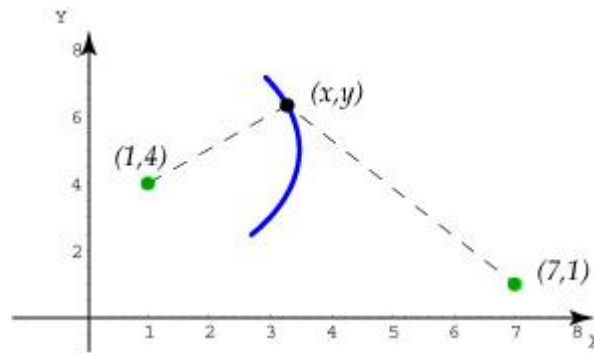
$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

por lo que su pendiente es $\frac{1}{2}$; con lo cual las dos rectas son perpendiculares. Si resolvemos las ecuaciones simultáneamente, determinamos que la intersección de estas rectas es, de hecho, el punto medio $M = (3;2)$ del segmento que une los puntos A y B .



Ejemplo 1: Determine el lugar geométrico de los puntos $P = (x; y)$ cuya distancia al punto $A = (7;1)$ es dos veces su distancia al punto $B = (1;4)$.

Los puntos A , B y P aparecen en la figura 4, junto con una curva que pasa por P y que representa el lugar geométrico buscado.



Según el enunciado se tiene que $d(P; A) = 2d(P; B)$, con lo cual podemos decir que

$$d(P; A) = 2d(P; B)$$

$$\sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

$$(x-7)^2 + (y-1)^2 = 4((x-1)^2 + (y-4)^2)$$

Desarrollando ambos binomios obtenemos la ecuación

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = 4(x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16)$$

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = 4(x^2 - 2x + y^2 - 8y + 17)$$

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = 4x^2 - 8x + 4y^2 - 32y + 68$$

$$-14x - 2y = 3x^2 - 8x + 3y^2 - 32y + 18$$

$$0 = 3x^2 + 6x + 3y^2 - 30y + 18$$

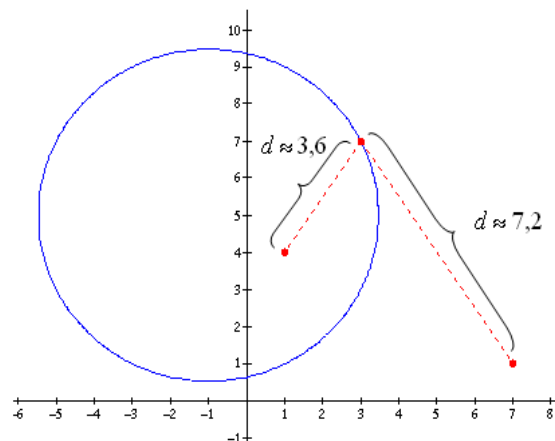
$$x^2 + 2x + y^2 - 10y + 6 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 10y + 6 + 25 - 25 = 0$$

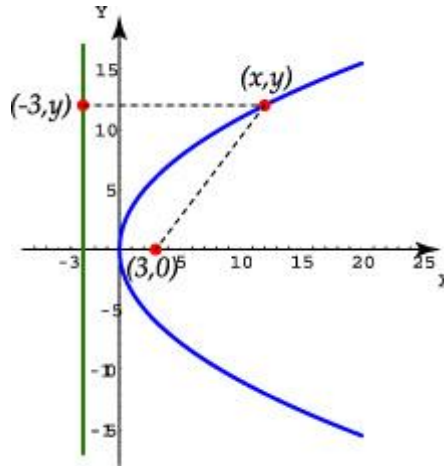
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 = 1 + 19$$

$$(x+1)^2 + (y-5)^2 = 20$$

Así, el lugar geométrico es una circunferencia con centro $(-1;5)$ y radio $r = 2\sqrt{5}$.



Ejemplo 2: Hallar el lugar geométrico de los puntos $P = (x; y)$ cuya distancia a la recta $x = -3$ es igual a la distancia al punto $A = (3;0)$.



Como la distancia de P a la recta es $|PR| = |x+3|$ y la distancia de P al punto A es $|AP| = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$

Tenemos que $(x+3)^2 = (x-3)^2 + y^2$

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2$$

$$12x = y^2$$

El lugar geométrico es una parábola

La Circunferencia

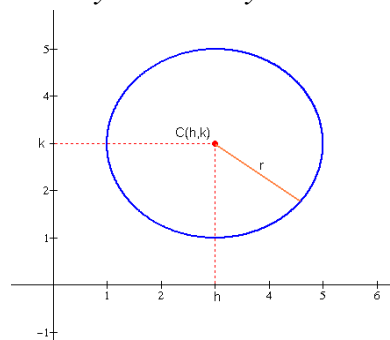
Una circunferencia se define como el conjunto de puntos $P = (x; y)$ en el plano que equidistan de un punto fijo $C(h,k)$ (llamado centro) a una distancia fija r (denominado radio).

La forma canónica de una circunferencia de radio $r \in \mathbb{R}^+$ y centro $C(h,k)$ es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

La forma general de una circunferencia de radio $r \in \mathbb{R}^+$ y centro $C(h,k)$ es

$$x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0$$



Sean $P(x, y)$ y $C(h, k)$ tal que,

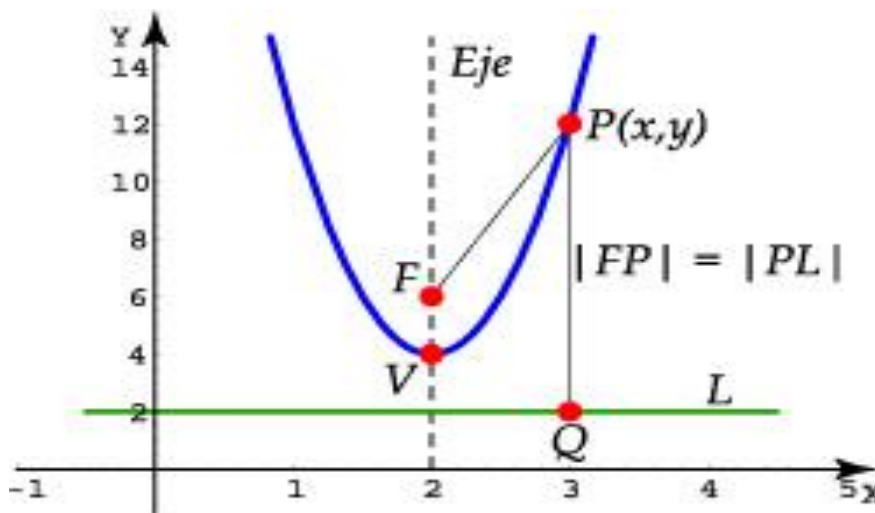
$$|PC| = r$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

La Parábola

La parábola es el conjunto de puntos $P = (x; y)$ en el plano que equidistan de un punto fijo F (llamado foco de la parábola) y de una recta fija L (llamada la directriz de la parábola) que no contiene a F .



El punto medio entre el foco y la directriz se llama vértice, la recta que pasa por el foco y por el vértice se llama eje de la parábola. Se puede observar en la figura que una parábola es simétrica respecto a su eje.

Ecuación canónica de la parábola

La forma canónica de la ecuación de una parábola con vértice $V = (h; k)$ y directriz $y = k - p$ es

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Donde foco F está a $|p|$ unidades (orientadas) del vértice

Sean $P(x, y)$ punto cualquiera, $F(h, k + p)$ su foco, $Q(x, k - p)$ punto en la recta directriz $L: y = k - p$,

$$|FP| = |PQ|$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+p))^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(k-p))^2}$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + ((y-k)-p)^2} = \sqrt{0 + (y-(k-p))^2}$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + ((y-k)-p)^2} = \sqrt{(y-(k-p))^2}$$

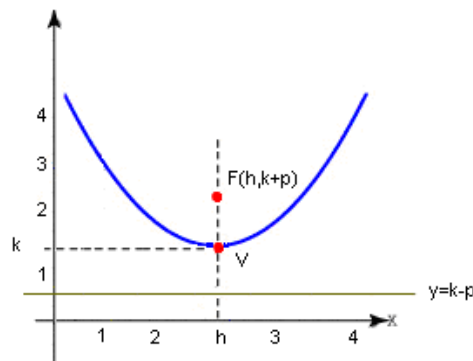
$$\begin{aligned} (x-h)^2 + ((y-k)-p)^2 &= (y-(k-p))^2 \\ (x-h)^2 + (y-k)^2 - 2p(y-k) + p^2 &= y^2 - 2y(k-p) + (k-p)^2 \\ (x-h)^2 + y^2 - 2ky + k^2 - 2py + 2pk + p^2 &= y^2 - 2ky + 2py + k^2 - 2kp + p^2 \\ (x-h)^2 &= 4py - 4kp \\ (x-h)^2 &= 4p(y-k) \end{aligned}$$

Con este resultado podemos resumir que

Se tiene que: Caso 1 Apertura de la parábola hacia arriba.

Valor de p	Coordenadas del Foco F	Ecuación de la directriz
$p > 0$	$(h, k + p)$	$y = k - p$

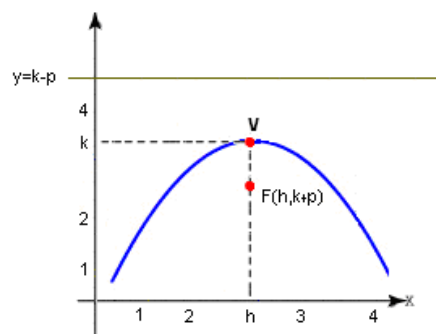
Y su grafica es



Se tiene que: Caso 2 Apertura de la parábola hacia Abajo.

Valor de p	Coordenadas del Foco	Ecuación de la directriz
$p < 0$	$(h, k + p)$	$y = k - p$

Y su grafica es



La forma canónica de la ecuación de una parábola con vértice $V = (h; k)$ y directriz $x = h - p$ es

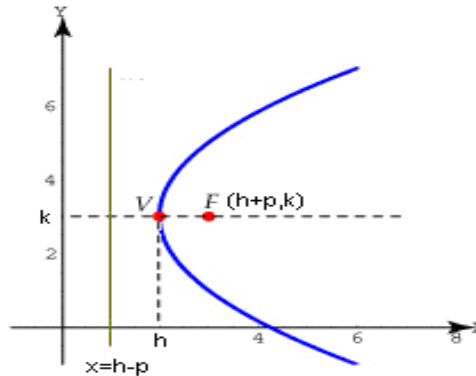
$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Donde foco F está a $|p|$ unidades (orientadas) del vértice

Se tiene que: Caso 1 Apertura de la parábola hacia la derecha.

Valor de p	Coordenadas del Foco	Ecuación de la directriz
$p > 0$	$(h + p, k)$	$x = h - p$

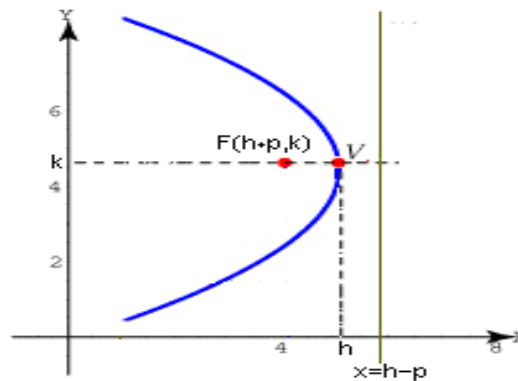
Su grafica



Se tiene que: Caso 2 Apertura de la parábola hacia la izquierda

Valor de p	Coordenadas del Foco	Ecuación de la directriz
$p < 0$	$(h + p, k)$	$x = h - p$

Su grafica

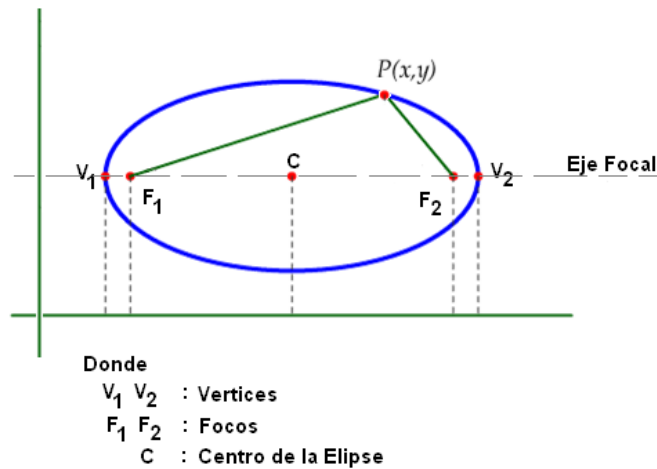


La Elipse

Una elipse es el conjunto de puntos $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (lugar geométrico) cuya suma de distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 del plano (llamados focos) es constante.

Llamaremos centro de la elipse, al punto medio entre los focos.

La recta que pasa por los focos, corta a la elipse en dos puntos llamados vértices. La cuerda que une los vértices es el eje mayor de la elipse. La cuerda perpendicular al eje mayor y que pasa por el centro se llama eje menor de la elipse.



Sean $F_1(h-c, k)$, $F_2(h+c, k)$ focos de una elipse, $C(h, k)$ centro de la elipse, $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ y $h, k, c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, entonces la forma canónica de la ecuación de una elipse está dada por:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

donde $a > c$, $a > b$ y $b^2 = a^2 - c^2$

Eje Focal Horizontal

Toda elipse centrada en el origen y de eje focal horizontal es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Con $a > b$, $c^2 = a^2 - b^2$

Eje Focal Vertical

Toda elipse centrada en el origen y de eje focal horizontal es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Con $a > b$, $c^2 = a^2 - b^2$

La excentricidad de una Elipse

La excentricidad es una medida de la "circularidad" de una elipse, entre más cerca de 0 más circular y entre más cerca de 1 más alargada.

La excentricidad e de una elipse está dada por el cociente $e = \frac{c}{a}$

Observe que al estar situados los focos en el eje mayor entre el centro y los vértices, siempre se tiene que

$$0 < c < a \Rightarrow 0 < \frac{c}{a} < 1 \Rightarrow 0 < e < 1$$

Es decir, las elipses tienen una excentricidad menor a 1. Para una elipse casi circular, los focos están cerca del centro y $\frac{c}{a}$ es pequeño. Para una elipse alargada los focos están cerca de los vértices y $\frac{c}{a}$ es casi 1.

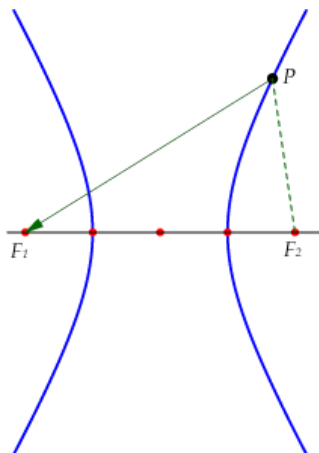
Esto explica la dificultad de los astrónomos en detectar las órbitas elípticas de los planetas, pues estas tienen los focos muy cerca de su centro, lo cual las hace casi circulares. La siguiente tabla muestra la excentricidad de las órbitas de los nueve planetas y la Luna.

Mercurio	$e = 0.2056$	Saturno	$e = 0.00543$
Venus	$e = 0.0068$	Urano	$e = 0.0460$
Tierra	$e = 0.0167$	Neptuno	$e = 0.0082$
Marte	$e = 0.0934$	Plutón	$e = 0.2481$
Jupiter	$e = 0.0484$	Luna	$e = 0.0549$

La Hipérbola

Una hipérbola se define como el conjunto de puntos $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ para los que la diferencia de sus distancias a dos puntos distintos prefijados (llamados focos) es, en valor absoluto, una constante

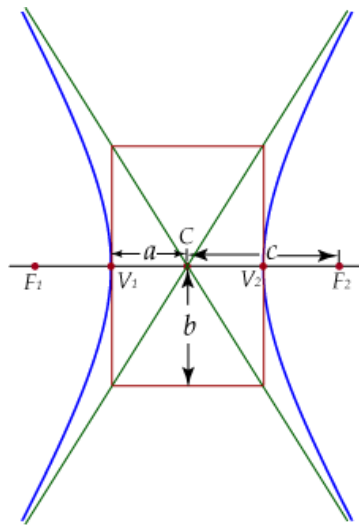
La recta que pasa por los focos corta a la hipérbola en dos puntos llamados vértices. El segmento recto que une los vértices se llama eje transversal y su punto medio es el centro de la hipérbola. Un hecho distintivo de la hipérbola es que su gráfica tiene dos partes separadas, llamadas ramas.



La ecuación canónica de la hipérbola con centro en $C(h, k)$ es $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ con eje transversal horizontal.

Y $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ con eje transversal vertical.

Los vértices están a una distancia de a unidades del centro y los focos a una distancia de c unidades del centro. Además $b^2 = c^2 - a^2$

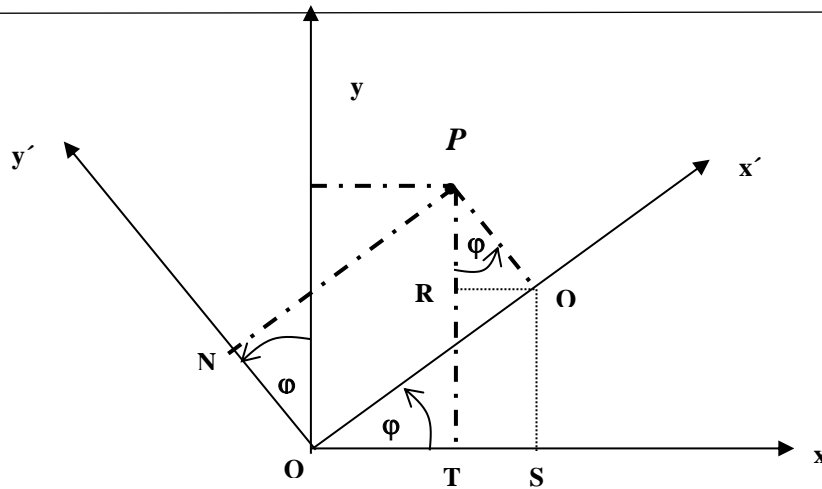


Una ayuda importante para trazar la gráfica de una hipérbola son sus asíntotas. Toda hipérbola tiene dos asíntotas que se intersecan en su centro y pasan por los vértices de un rectángulo de dimensiones $2a$ y $2b$ y centro en $C(h, k)$. El segmento recto de longitud $2b$ que une $(h, k + b), (h, k - b)$ se llama eje conjugado de la hipérbola.

Si la hipérbola tiene un eje transversal horizontal, las ecuaciones de las asíntotas son $y = k \pm \frac{b}{a} (x - h)$ y si el eje transversal es vertical, las ecuaciones de las asíntotas son $y = k \pm \frac{a}{b} (x - h)$

Fórmulas de rotación:

Dos sistemas de referencia con origen común O; siendo la rotación de valor ϕ rígida, es decir, se conserva el ángulo entre los ejes. Las coordenadas del punto P son $(x'; y')$ con respecto al sistema rotado y $(x; y)$ con respecto al sistema de ejes horizontal y vertical.



Entonces:

$$x = \overline{OT} = \overline{OS} - \overline{TS}$$

$$y = \overline{TP} = \overline{TR} + \overline{RP}$$

$$x' = \overline{NP} = \overline{OQ}$$

$$y' = \overline{PQ}$$

$$\overline{OS} = \overline{OQ} \cos \varphi = x' \cos \varphi$$

$$\overline{TS} = \overline{RQ} = \overline{PQ} \sin \varphi = y' \sin \varphi$$

resultando:

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$$

$$\overline{TR} = \overline{QS} = \overline{OQ} \sin \varphi = x' \sin \varphi$$

$$\overline{RP} = \overline{PQ} \cos \varphi = y' \cos \varphi$$

resultando:

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

Fórmulas de rotación:

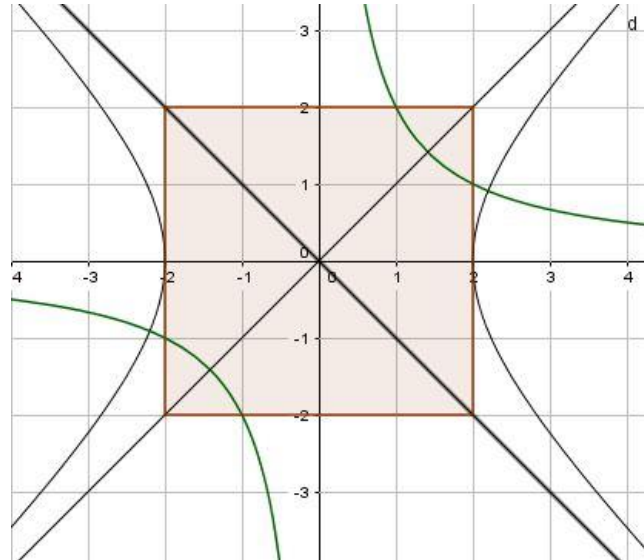
$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases}$$

Las fórmulas de rotación pueden escribirse en forma matricial

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta la ecuación de la hipérbola equilátera: $x^2 - y^2 = a^2$; las fórmulas de transformación por rotación y el ángulo $\varphi = 45^\circ$.

$$\begin{cases} x = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ \\ y = y' \cos 45^\circ + x' \sin 45^\circ \end{cases}$$



o sea:
$$\begin{cases} x = x' \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = x' \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{o también} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') \end{cases}$$

reemplazando:

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') \right]^2 - \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') \right]^2 = a^2$$

$$\frac{1}{2} (x'^2 - 2x'y' + y'^2) - \frac{1}{2} (x'^2 + 2x'y' + y'^2) = a^2$$

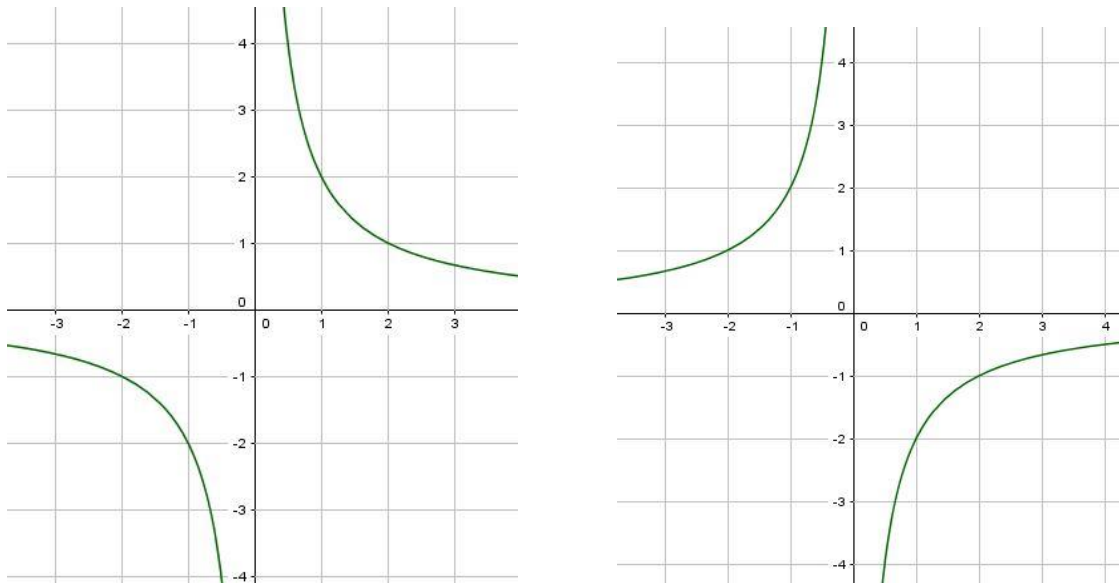
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x'^2 - x'y' + \frac{1}{2} y'^2 - \frac{1}{2} x'^2 - x'y' - \frac{1}{2} y'^2 &= a^2 \\ \Rightarrow -2x'y' &= a^2 \Rightarrow x'y' = -\frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{haciendo } K = -\frac{a^2}{2} \quad \Rightarrow K = x'y'$$

Reemplazando x' e y' por x e y la ecuación de la hipérbola equilátera es $\mathbf{x \cdot y = k}$

Si: $k > 0 \Rightarrow x$ e y ; son de igual signo $\Rightarrow xy = k$

Si: $k < 0 \Rightarrow x$ e y ; son de distinto signo $\Rightarrow xy = -k$



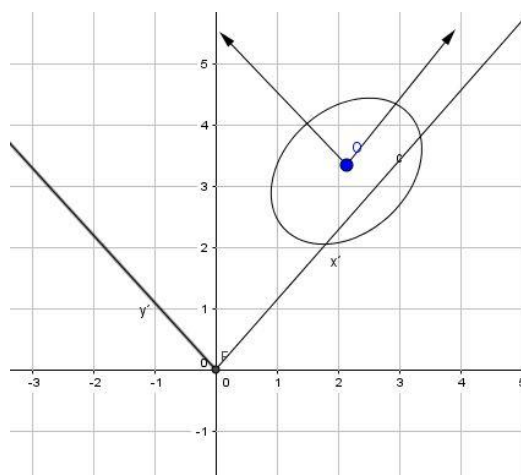
ESTUDIO DE LA ECUACIÓN GENERAL DE 2º GRADO EN DOS VARIABLES

Como hemos visto, al rotar el sistema de ejes coordenados en la ecuación de la cónica correspondiente aparece un nuevo término en el cual las variables están multiplicadas; este término recibe el nombre de término rectangular y da a la ecuación general el siguiente aspecto: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

En esta ecuación el termino rectangular, es responsable de la rotación, mientras que los términos lineales (Dx, Ey) son los responsables de la traslación del sistema de ejes.

No resulta sencillo graficar una expresión de este tipo, razón por la cual es beneficioso previamente llevarla a una forma más sencilla mediante una rotación y una traslación adecuadas, que permitan encontrar la forma canónica de la misma.

Supongamos el caso general de una cónica desplazada y rotada.



La ecuación referida al sistema $O(x,y)$ será $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$; por la presencia del termino Bxy los coeficientes A y C pierden la propiedad de identificar el género de la cónica.

Así $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 8x - 16y + 27 = 0$ que tiene $A=C$ NO corresponde a una circunferencia.

Si existe el termino rectangular **NUNCA** puede tratarse de una circunferencia.

Cuando se refiere al sistema $O(x',y')$ $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$

si y sólo si x' es paralelo a x''
 y' es paralelo a y''

(No hay término rectangular)

y si se refiere a $O'(x'',y'')$ $A''x''^2 + C''y''^2 + F'' = 0$ si se trata de una cónica con centro.

O bien $A''x''^2 + E''y'' = 0$; $C''y''^2 + D''x'' = 0$ si se trata de una cónica sin centro.

Veamos ahora como se modifica la ecuación general cuando hacemos una rotación arbitraria de ejes de magnitud α .

Aplicando las fórmulas de rotación: $\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha \\ y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$ y reemplazando en la ecuación general, obtenemos:

$$A(x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha)^2 + B(x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha)(x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha) + C(x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha)^2 + D(x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha) + E(x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha) + F = 0$$

Desarrollando los paréntesis

$$A(x'^2 \cos^2 \alpha - 2x'y' \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + y'^2 \operatorname{sen}^2 \alpha) + B(x'^2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + x'y' \cos^2 \alpha - x'y' \operatorname{sen}^2 \alpha - y'^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) + C(x'^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2x'y' \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + y'^2 \cos^2 \alpha) + D(x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha) + E(x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha) + F = 0$$

Nos queda

$$Ax'^2 \cos^2 \alpha - 2Ax'y' \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + Ay'^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + Bx'^2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + Bx'y' \cos^2 \alpha - Bx'y' \operatorname{sen}^2 \alpha - By'^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + Cx'^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2Cx'y' \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + Cy'^2 \cos^2 \alpha + Dx' \cos \alpha - Dy' \operatorname{sen} \alpha + Ex' \operatorname{sen} \alpha + Ey' \cos \alpha + F = 0$$

Ordenamos ahora los términos en x'^2 , $x'y'$, y'^2 , x' , y' y el termino independiente.

$$x'^2 (A \cos^2 \alpha + B \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + C \operatorname{sen}^2 \alpha) + x'y' (-2A \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + B(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) + 2C \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) + y'^2 (A \operatorname{sen}^2 \alpha - B \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha) + x'(D \cos \alpha + E \operatorname{sen} \alpha) + y'(-D \operatorname{sen} \alpha + E \cos \alpha) + F = 0$$

resultando

para una rotación α cualquiera

$$A' = A \cos^2 \alpha + B \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + C \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$B' = -2A \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + B(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) + 2C \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = (C - A) \operatorname{sen} 2\alpha + B \cos 2\alpha$$

$$\begin{aligned} C' &= A \operatorname{sen}^2 \alpha - B \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha \\ D' &= D \cos \alpha + E \operatorname{sen} \alpha \\ E' &= -D \operatorname{sen} \alpha + E \cos \alpha \\ F' &= F \end{aligned}$$

De las igualdades precedentes, se observa:

a) $F' = F$ (para cualquier rotación no se modifica el término independiente)

$$\begin{aligned} \text{b) } A'+C' &= A \cos^2 \alpha + B \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + C \operatorname{sen}^2 \alpha + A \operatorname{sen}^2 \alpha - B \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha \\ A'+C' &= A(\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) + C(\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ A'+C' &= A + C \end{aligned}$$

La suma de los coeficientes de los términos cuadráticos no se modifica en la rotación y recibe el nombre de **INVARIANTE LINEAL**.

$$\begin{aligned} \text{c) } A'-C' &= A \cos^2 \alpha + B \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + C \operatorname{sen}^2 \alpha - A \operatorname{sen}^2 \alpha + B \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - C \cos^2 \alpha \\ A'-C' &= A(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) + 2B \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + C(\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \\ A'-C' &= A(\cos 2\alpha) + B \operatorname{sen} 2\alpha - C(\cos 2\alpha) \\ A'-C' &= (A - C) \cos 2\alpha + B \operatorname{sen} 2\alpha \\ -B' &= (A - C) \operatorname{sen} 2\alpha - B \cos 2\alpha \\ (A'-C')^2 &= (A - C)^2 \cos^2 2\alpha + B(A - C) \operatorname{sen} 4\alpha + B^2 \operatorname{sen}^2 2\alpha \\ (-B')^2 &= (A - C)^2 \operatorname{sen}^2 2\alpha - B(A - C) \operatorname{sen} 4\alpha + B^2 \cos^2 2\alpha \\ (A'-C')^2 + (-B')^2 &= (A - C)^2 \cos^2 2\alpha + B(A - C) \operatorname{sen} 4\alpha + B^2 \operatorname{sen}^2 2\alpha + \\ &\quad + (A - C)^2 \operatorname{sen}^2 2\alpha - B(A - C) \operatorname{sen} 4\alpha + B^2 \cos^2 2\alpha \end{aligned}$$

$$(A'-C')^2 + (-B')^2 = (A - C)^2 + B^2$$

$$(A'-C')^2 + (-B')^2 = (A - C)^2 + B^2$$

$$A'^2 - 2A'C' + C'^2 + B'^2 = A^2 - 2AC + C^2 + B^2$$

$$\text{restando } (A'+C')^2 = (A+C)^2 \Rightarrow A'^2 + 2A'C' + C'^2 + B'^2 = A^2 + 2AC + C^2 + B^2$$

se obtiene

$$A'^2 - 2A'C' + C'^2 + B'^2 = A^2 - 2AC + C^2 + B^2$$

-

$$\begin{aligned} A'^2 + 2A'C' + C'^2 + B'^2 &= A^2 + 2AC + C^2 + B^2 \\ \hline -4A'C' + B'^2 &= -4AC + B^2 \end{aligned}$$

o bien $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$ que recibe el nombre de **INVARIANTE CUADRÁTICO**.

d) Si en la expresión $B' = (C - A) \operatorname{sen} 2\alpha + B \cos 2\alpha$ hacemos $B' = 0$ resulta

$$(A - C) \operatorname{sen} 2\alpha = B \cos 2\alpha$$

$$\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \tan 2\alpha = \frac{B}{A - C}$$

α resulta ser el ángulo que hay que girar los ejes para que desaparezca el término rectangular.

En consecuencia $\frac{B}{A - C}$ da la tangente del ángulo 2α .

Para ese giro la expresión general tiene el aspecto $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ y los coeficientes de los términos cuadráticos (A' y C') recobran la propiedad de identificar el género de la cónica.

e) Puede demostrarse, además, que cualquiera sea el ángulo de la rotación:

$$\begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2A' & B' & D' \\ B' & 2C' & E' \\ D' & E' & 2F' \end{vmatrix}$$

igualdad que recibe el nombre de **INVARIANTE CÚBICO**.

USO DE LOS INVARIANTES

Sin necesidad de calcular el ángulo de rotación que permite eliminar el término rectangular y la posterior aplicación de las fórmulas de traslación para eliminar los términos lineales (lo que también puede efectuarse completando cuadrados), resulta posible identificar a partir de la ecuación dada (mediante el uso de los invariantes) el género de la cónica que se estudia:

Cónicas Verdaderas: Cuando el discriminante (invariante cúbico) es distinto de cero, se trata de una cónica real o verdadera.

El invariante cuadrático $B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$ para el ángulo adecuado de rotación que corresponde a $B'=0$ (anulación del término rectangular) se transforma en $B^2 - 4AC = -4A'C'$. A partir de la ecuación dada calculamos $B^2 - 4AC$ que puede darnos valores negativos, nulos o positivos.

a) Si $B^2 - 4AC < 0$ el lado derecho de la igualdad es decir $-4A'C'$ será negativo. Para que esto sea posible A' y C' deben ser de igual signo, en cuyo caso se trata de una **ELIPSE**.

b) Si $B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow -4A'C' = 0$ lo que implica que A' o $C' = 0$; se trata de una **PARÁBOLA**.

a) Si $B^2 - 4AC > 0 \Rightarrow -4A'C' > 0$ para que esto sea posible A' y C' deben ser de signos opuestos; se trata de una **HIPÉRBOLA**.

Cónicas degeneradas: El invariante cúbico resulta igual a cero; medimos el invariante cuadrático como lo hicimos para las cónicas verdaderas, resultando los siguientes casos:

d) Si $B^2 - 4AC < 0$; se trata de una **ELIPSE DEGENERADA**; son dos rectas imaginarias con un punto real.

e) Si $B^2 - 4AC = 0$; se trata de una **PARÁBOLA DEGENERADA**; dos rectas coincidentes.

f) Si $B^2 - 4AC > 0$; se trata de una **HIPÉRBOLA DEGENERADA**; dos rectas reales que se cortan.

Ejemplo: Reducir la ecuación $x^2 + 2xy + y^2 - x + y - \sqrt{2} = 0$ a la forma canónica y graficar.

(Recordemos que los coeficientes de los términos cuadráticos no tienen la propiedad de identificar el género de la cónica y que, por existir el término rectangular no puede tratarse de una circunferencia)

1) Cálculo del **invariante cúbico**: $\begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2\sqrt{2} \end{vmatrix} \neq 0$. Se trata de una **CÓNICA REAL**.

2) Cálculo del **invariante cuadrático**: $B^2 - 4AC = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$. Corresponde a una **PARÁBOLA**.

3) Cálculo del ángulo de rotación que elimina el término rectangular:

$$\tan \varphi = \frac{B}{A - C} = \frac{2}{1 - 1} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

4) Obtención de la ecuación canónica (no rotada):

(Debe procederse siempre a efectuar la rotación antes de la traslación, ya que al resultar del género parábola no puede eliminarse uno de los términos lineales; si intentáramos previamente la traslación, estaríamos en presencia de un sistema de ecuaciones lineales inconsistente).

En la ecuación $x^2 + 2xy + y^2 - x + y - \sqrt{2} = 0$ reemplazamos las variables por las ecuaciones de rotación:

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

como $\varphi = 45^\circ$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

aplicando estas transformaciones, resulta para cada uno de los términos:

$$x^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (x' - y')^2 = \frac{1}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2)$$

$$2xy = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y')(x' + y') = x'^2 + x'y' - x'y' - y'^2$$

$$y^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (x' + y')^2 = \frac{1}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2)$$

$$-x = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

$$-\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

sumando los lados derechos de las igualdades y simplificando, llegamos a:

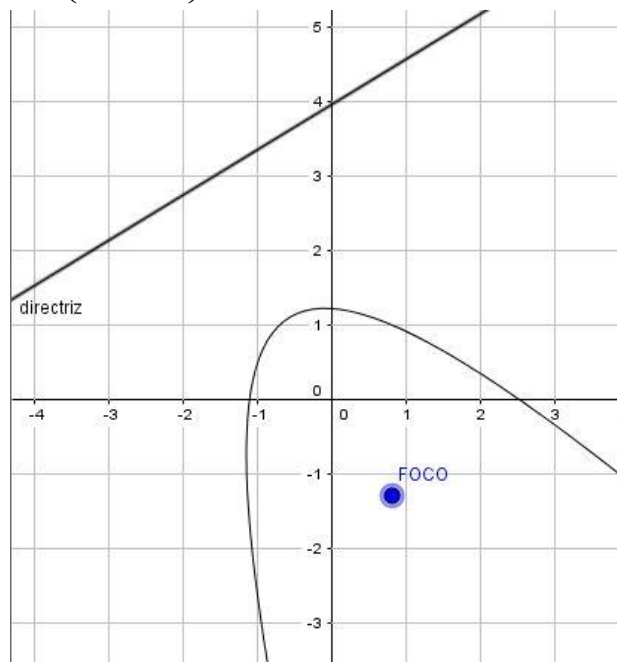
$$2x'^2 + \sqrt{2}y' - \sqrt{2} = 0$$

$$x'^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(y' - 1) = 0$$

$$x'^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(y' - 1)$$

comparando con la expresión: $x'^2 = 2p(y' - k)$ vemos que se trata de una parábola de eje focal y' , que abre sus ramas hacia las y' negativas, con vértice en el punto V de coordenadas (0,1) del sistema $x'y'$, parámetro

$$p = \frac{\sqrt{2}}{4}; \text{ foco en } F\left(0; 1 - \frac{p}{2}\right) = F\left(0; 1 - \frac{\sqrt{2}}{8}\right); \text{ directriz de ecuación } y' = 1 + \frac{\sqrt{2}}{8}$$



Bibliografía obligatoria y recomendada:

- Armando Rojo: Álgebra I y II
- Hector Di Caro: Álgebra y Geometría Analítica.
- Sagastume Berra, G. Fernández: Álgebra y Cálculo Numérico.
- Lentin, Rivaud: Álgebra Moderna
- Donato Di Pietro: Geometría Analítica.
- Ch. H. Lehmann Geometría Analítica.
- Louis Leithold El Cálculo con Geometría