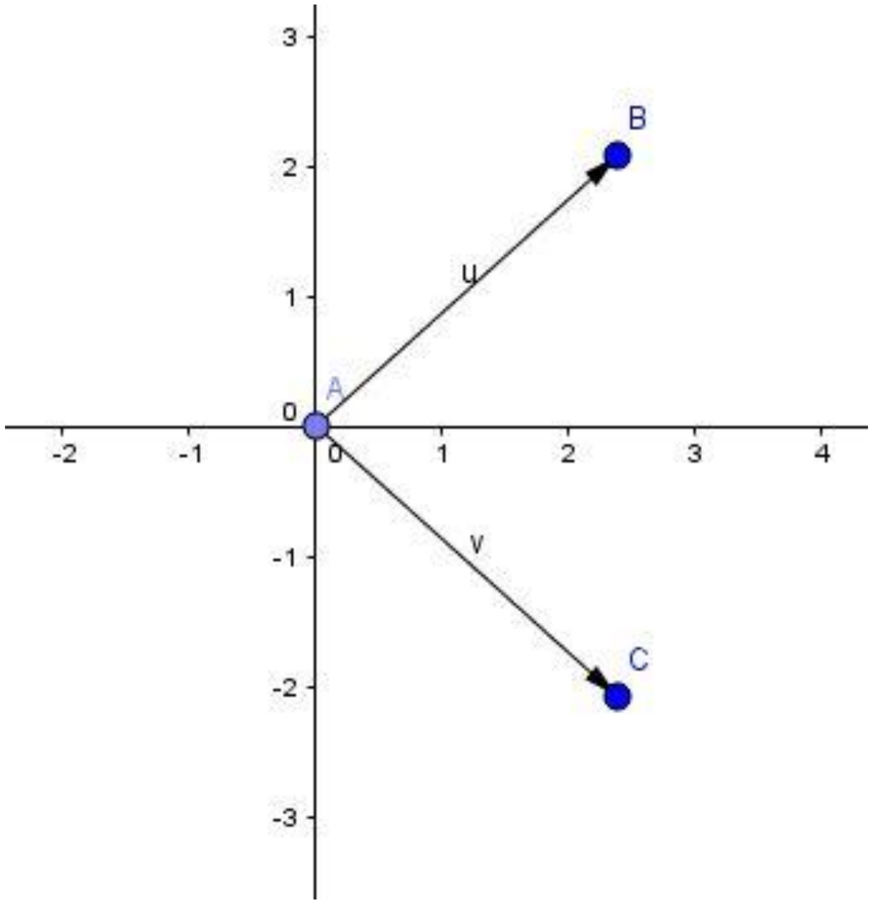
Transformaciones Lineales

UTN FRLP
Álgebra y Geometría Analítica

Ing. Viviana CAPPELLO

Sea $T:R2 \to R2$, la función que a cada (x,y) de $R2$ le hace corresponder el vector (x,-y) de $R2$, es decir:

$$T(x,y)=(x,-y)$$



Sean V y W espacios vectoriales, se dice que una T.L. , T de V en W es una función que asigna a cada vector v $\in$V, un único vector T(v) $\in$W y para el cual se cumple:

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

$$T(\alpha\, v) = \alpha\, T(v)$$

Sea una T. L. de V en W. Se llama imagen de T al conjunto:

$/ \exists\, v \in V$ con $T(v)=w\}$

Se llama núcleo de T al conjunto

$/\ T(v)=0\}$

Se verifica que:

$$\dim(V)=\dim(\ker T)+\dim(\operatorname{Im} T)$$

Cambio de base

En R^2 y R^3 se expresa cualquier vector en términos de base canónica, para R^2:

e_1= (1,0) y e_2=(0,1);

para R^3:

e_1= (1,0,0) , e_2= (0,1,0) y : e_3= (0,0,1)

Evidentemente, existen infinitas bases de espacios vectoriales de dimensión n, ya que en un espacio vectorial n, n vectores linealmente independientes forman base.

Sean e_1= (1,0) y e_2=(0,1) y B={ e_1, e_2}

Sean v_1= (1,3) y v_2= (-1,2) . v_1 y v_2 son linealmente independientes

B={ v_1, v_2} es base de R^2

Sea x=(x_1;x_2) un vector de R^2

$$x = x_1(1,0) + x_2(0,1)$$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

$$(x)_{B1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Como B_2 es otra base de R^2, $\exists$ escalares C_1y C_2, tal que:

$$x = c_1 e_1 + c_2 e_2$$

$$(x)_{B2} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_1 = (1,0) = \frac{2}{5}(1,3) - \frac{3}{5}(-1,2) = \frac{2}{5}v_1 - \frac{3}{5}v_2$$

=

$$e_2 = (0,1) = \frac{1}{5}(1,3) + \frac{1}{5}(-1,2) = \frac{1}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2$$

y

$$(e_1)_{B1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

y

$$(e_2)_{B2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Entonces $x = x_1e_1 + x_2e_2$

$$x = x_1(\frac{2}{5}v_1 - \frac{3}{5}v_2) + x_2(\frac{1}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2)$$

$$x = (\frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2)v_{1+}(-\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2)v_2$$

Por lo tanto:

$$C_1 = \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2$$

$$C_2 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2$$

La matriz $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ se llama matriz de transición de B1 a B2

ó

matriz de cambio de base.

Teorema

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea W un espacio vectorial de dimensión m.

Sean $B_1 = \{v_1, v_2, \dots \dots . . v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, w_2, \dots \dots . . w_n\}$ ⇨∃ una única matriz A_T de mxn / $(T(x))_{B2} = A_T(x)_{B1}$

$A_T(x)_{B1}$ ⇨ matriz asociada a la T. L.

Ejercicio:

Sea T: $R^3 \rightarrow R^2$, dada por:

$T(x,y,z)=(2x + y + z \,;\, y - 3z)$

$B_1=\{(1,0,1);\ (1,1,0);\ (1,1,1)\}$

$B_2=\{(1,-1);\ (2,3)\}$

Hallar A_T respecto a B_1 y B_2

Autovalores y Autovectores

Sea A una matriz de nxn. El número λ (real o complejo) se llama **autovalor** de A, si y sólo si existe un vector v $\in$ (v λ v, donde v es una matriz columna.

El vector v se llama **autovector** de A correspondiente al autovalor λ.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$ es el autovalor de A correspondiente al autovector (2,1).

$$A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -2$ es el autovalor de A correspondiente al autovector (3,2).

Teorema

Sea A una matriz de nxn. Entonces λ es autovalor de A si y solo si: $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0$

Donde $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0$ recibe el nombre de ecuación característica de A

$P(\lambda)$=polinomio característico.

Procedimiento para calcular autovalores y autovectores

1)Hallar $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)$

2) Hallar las raíces de P

3) Resolver el sistema homogéneo (A-I).v=0   con i=1…..m

Ejemplo

Sea A=$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

P(λ)=det(A-λI)=

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda)-6$$
$$= \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

de donde $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 1$

- para $\lambda_1 = 6$

(A-6I).v=0 ⇨ $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$=0

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore x_1 = x_2$$

$v_{1=(1,1)}$ es un autovector correspondiente a $\lambda_1 = 6$

- para $\lambda_2 = 1$

(A-I).v=0 ⇨ $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$=0

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore x_1 = -\frac{2}{3}x_2$$

$v_{2=(2,-3)}$ es un autovector correspondiente a $\lambda_1 = 1$

Ejercicio:

Hallar para la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ los autovectores y autovalores correspondientes si los tuviera.