Algebra y Geometría Analítica

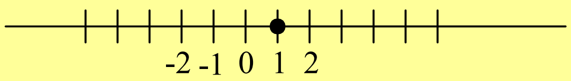
Ing. Carlos A. LOPEZ
Prof. Ricardo Massucco

Con la colaboración del Ing. Carlos CHONG

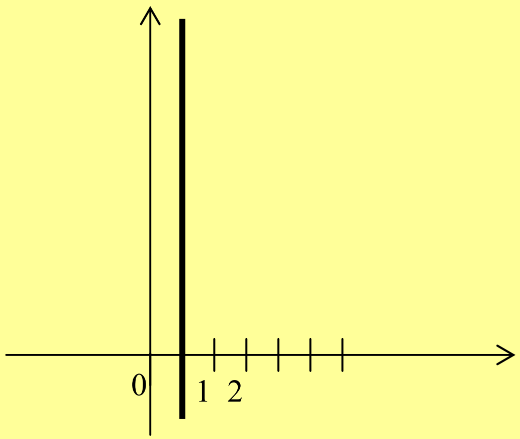
Para comenzar :

¿Quien nos puede decir qué es x=1?

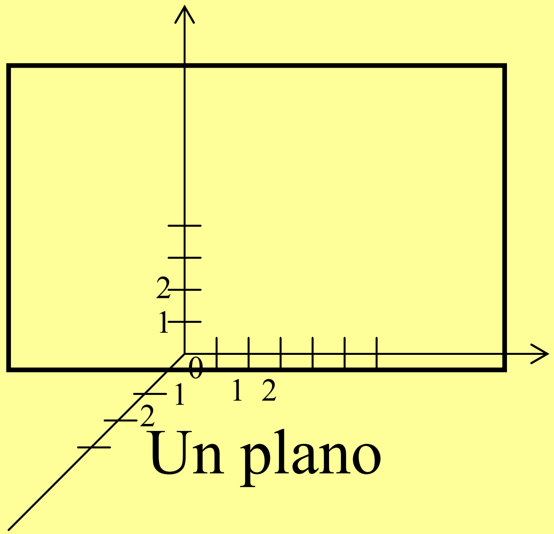
Lo primero que nos deberíamos preguntar es ¿Dónde? ¿En que espacio? ¿La recta, E_2 o E_3?



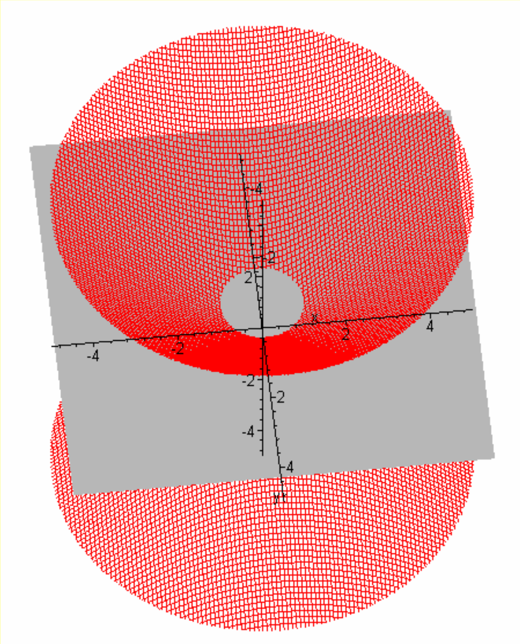
Un punto



Una recta

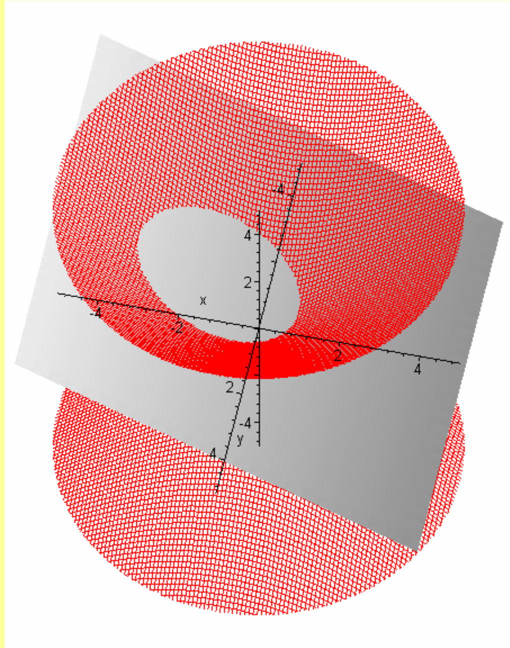


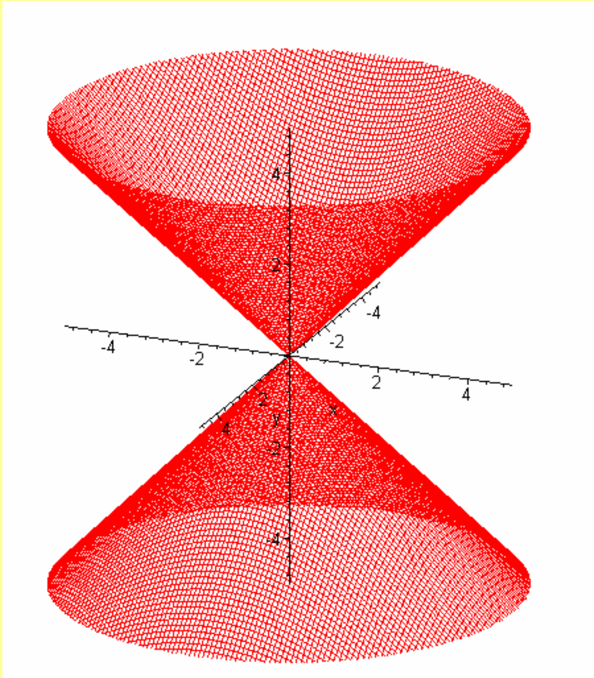
Un plano

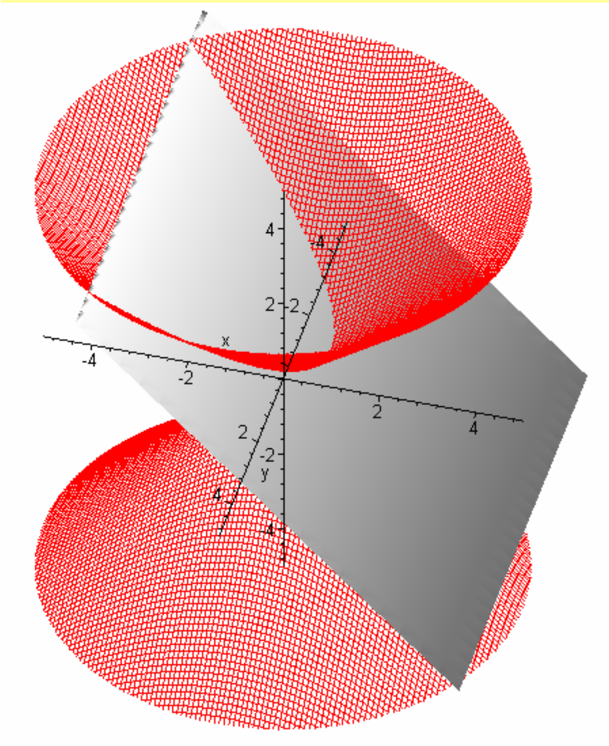


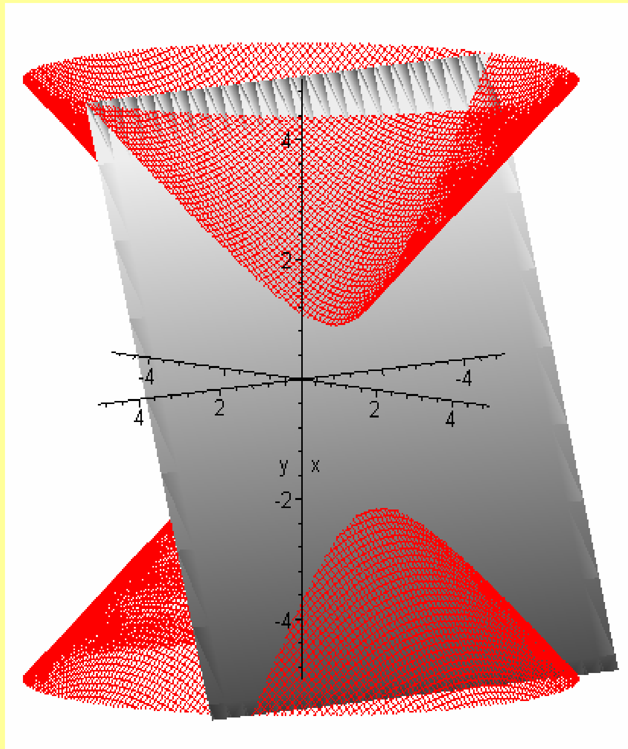
Las Curvas

Cónicas







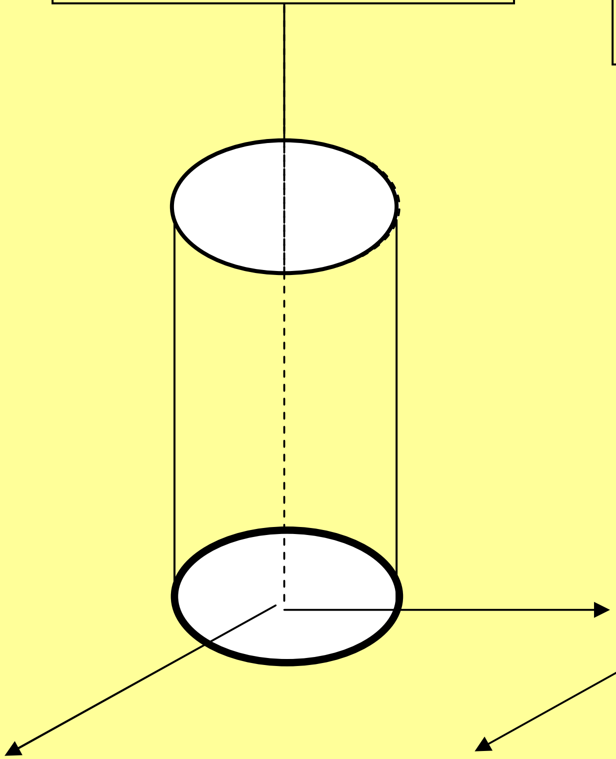


Superficies Cilíndricas

Recibe este nombre la superficie que es generada por una recta que se mueve manteniéndose paralela a una recta fija llamada generatriz y pasa siempre por una curva fija dada que recibe el nombre de directriz.

Para nuestro estudio particular consideraremos a la directriz como una curva perteneciente a uno de los planos coordenados y la generatriz como una recta perpendicular a dicho plano.

Cilindro circular o elíptico

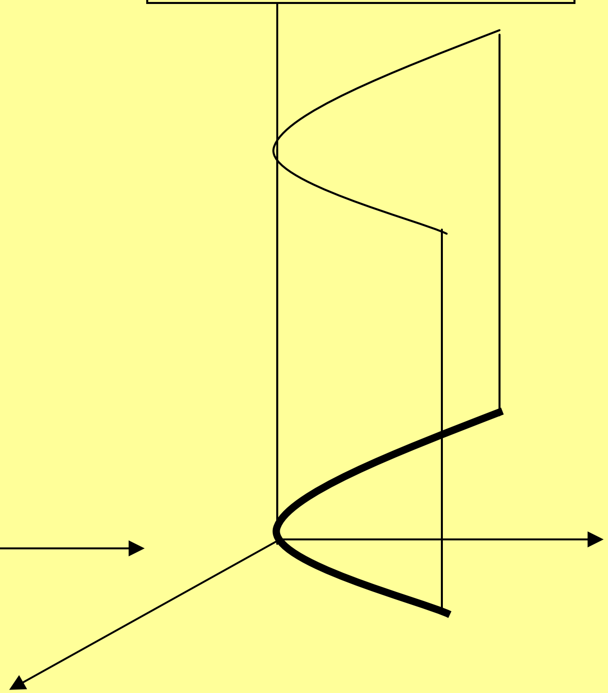


$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$o$$

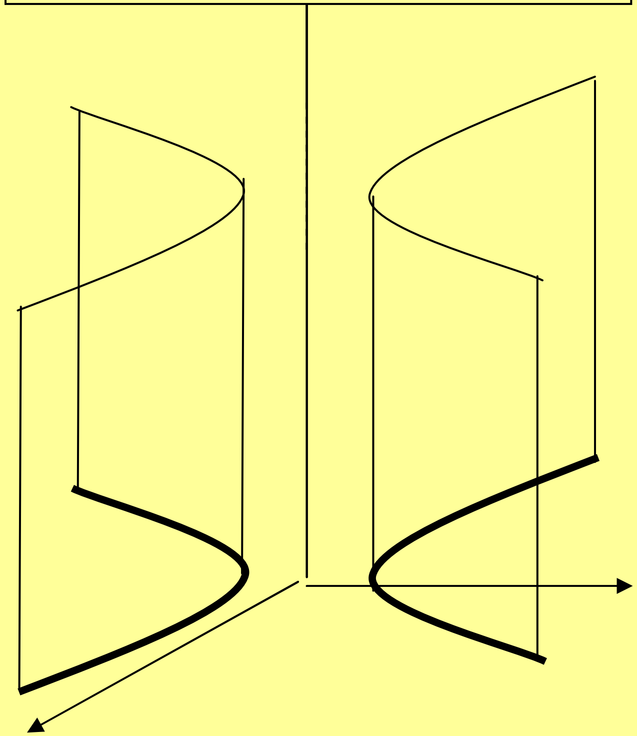
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cilindro de directriz parabólica.



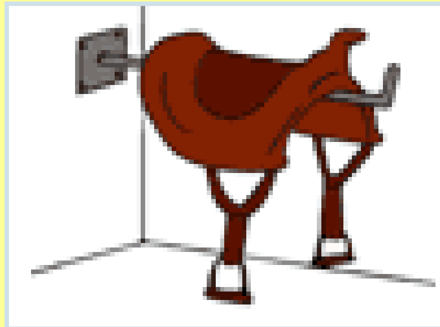
$$x^2 = 2py$$

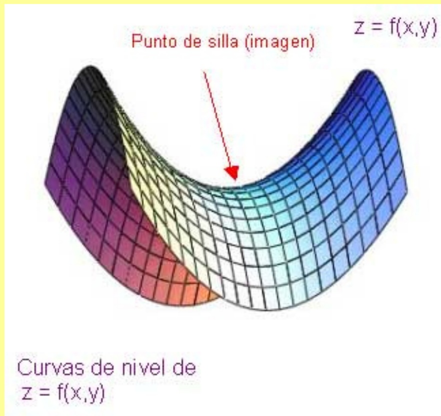
Cilindro de directriz hiperbólica



$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Estudio del Paraboloide Hiperbólico





Estudio de una Superficie

1- Estudio de la Simetría.

2- Verificar si la superficie contiene o no el Origen del Sistema de coordenadas.

3- Intersección con los ejes coordenados.

4- Intersección con los planos coordenados.

5- Intersección con planos paralelos a los planos coordenados.

Estudio de la Simetría

Si la ecuación de una superficie no se altera cuando se cambia de signo de:

- Una de las variables, la superficie es simétrica con respecto al plano coordenado a partir del cual se mide esa variable.
- Dos de sus variables, la superficie es simétrica con respecto al eje coordenado a lo largo del cual se mide la variable cuyo signo no se cambio.
- Las tres variables, la superficie es simétrica con respecto al origen de coordenadas

1- Simetría

*1- simetría respecto del plano **yz**.*

$$\boxed{\frac{(-x)^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z}$$

*2- simetría respecto del plano **xz***

$$\boxed{\frac{x^2}{p} - \frac{(-y)^2}{q} = 2z}$$

*3- es decir simetría respecto del eje **z**.*

$$\boxed{\frac{(-x)^2}{p} - \frac{(-y)^2}{q} = 2z}$$

2- Verificar si la superficie contiene o no el Origen del Sistema de coordenadas.

Reemplazando por el punto P(0,0,0)

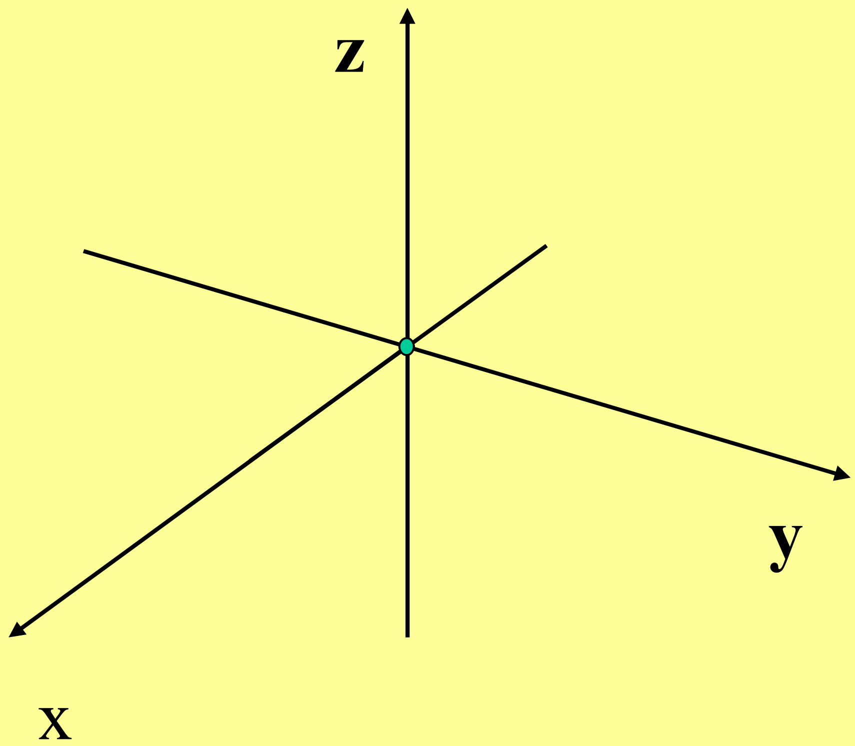
$$\boxed{\frac{0^2}{p} - \frac{0^2}{q} = 2.0}$$

Se verifica, por lo tanto la superficie contiene al origen de coordenadas

3- Intersección con los ejes coordenados

a) Intersección con el eje x:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$



$$o\ sea:$$

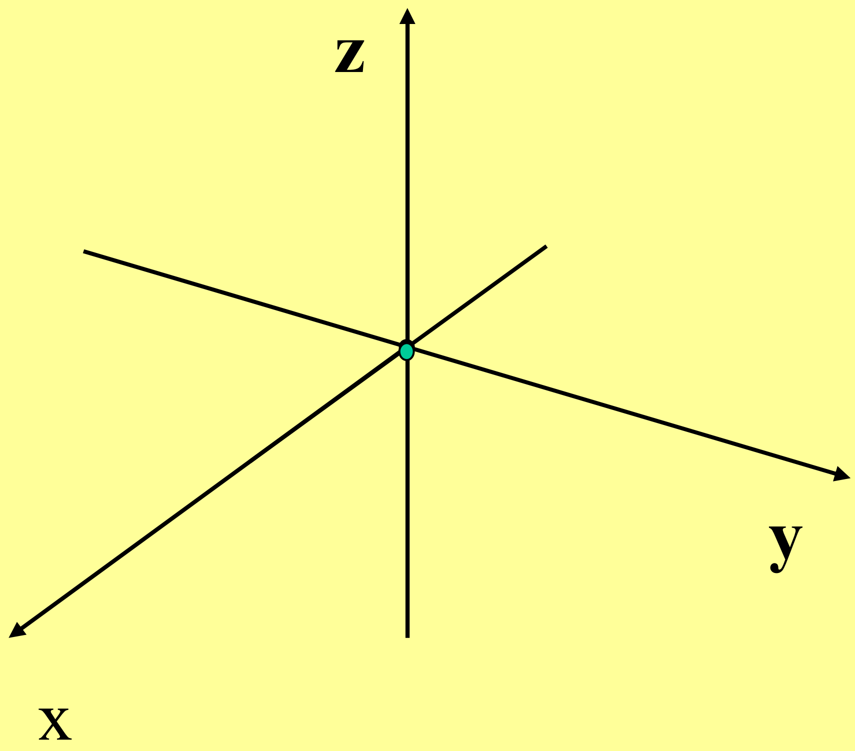
$$\Rightarrow \quad x = y = z = 0$$

$$P(0,0,0)$$

3- Intersección con los ejes coordenados

a) **Intersección con el eje y:**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{y^2}{p} = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$



o sea :

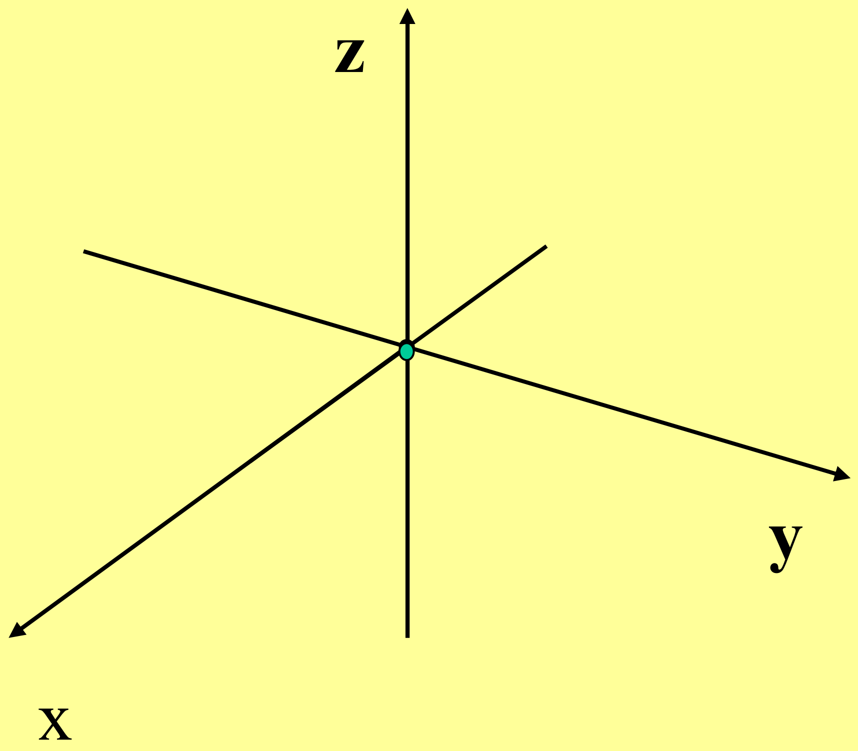
$$\Rightarrow \quad x = y = z = 0$$

$$P(0,0,0)$$

3- Intersección con los ejes coordenados

a) **Intersección con el eje z:**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2z \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



o sea :

$$\Rightarrow \quad x = y = z = 0$$

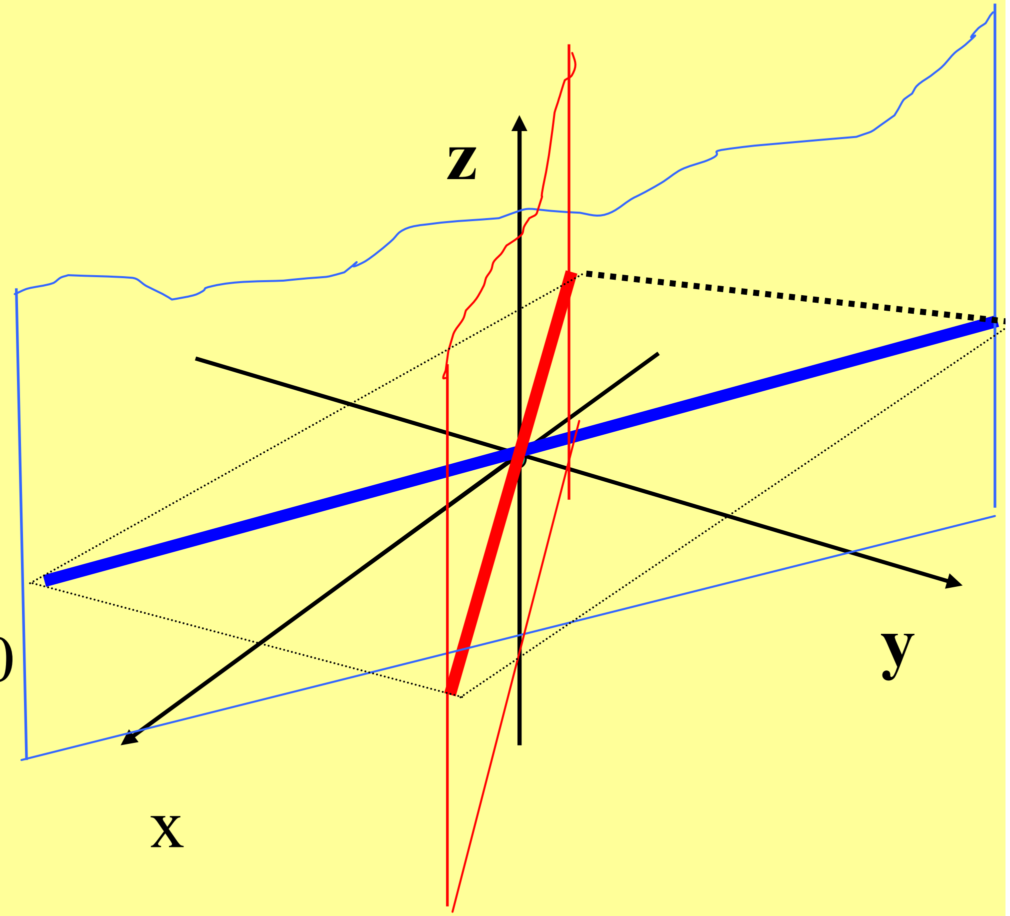
$$P(0,0,0)$$

4- Intersección con los planos coordenados

a) Intersección con el plano coordenado xy *(z=0)*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) \bullet \left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$



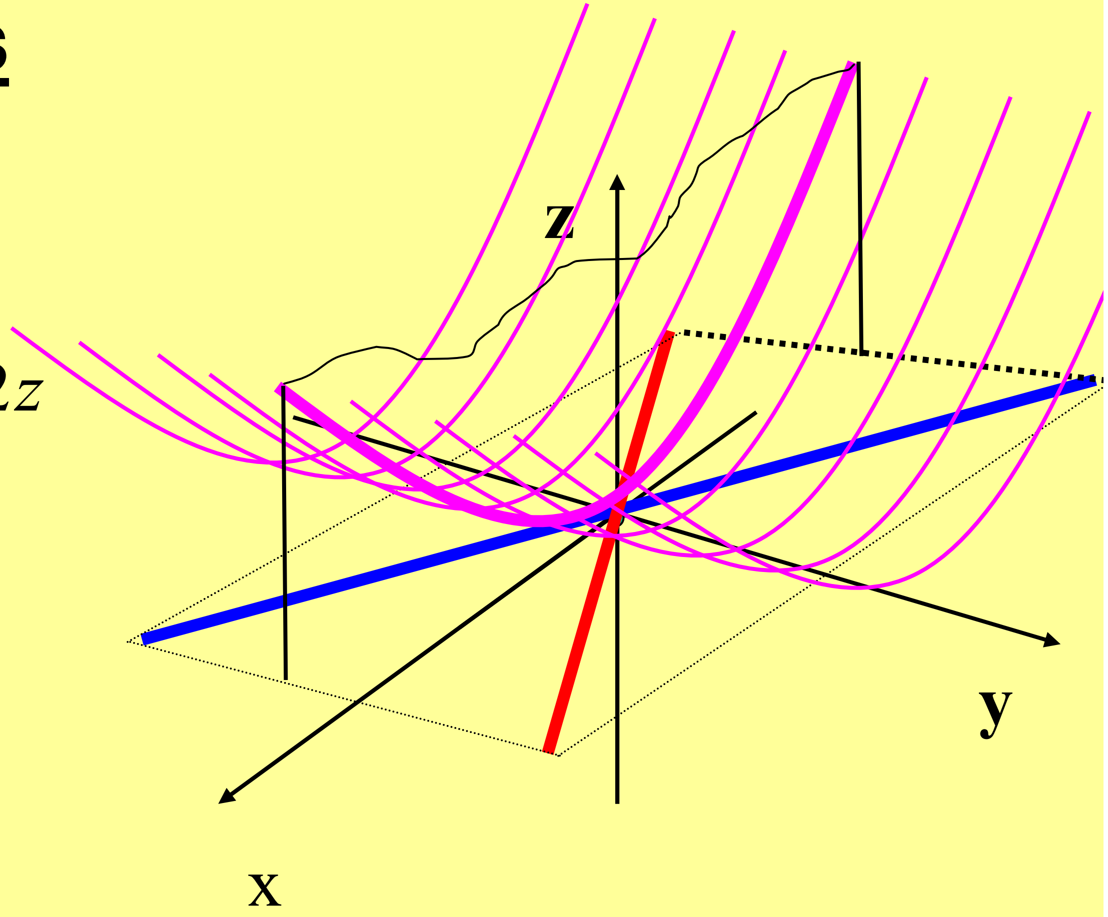
Es un par de planos cortados con el plano xy, nos da un **par de rectas** en el plano coordenado xy

4- Intersección con los planos coordenados

b) Intersección con el plano coordenado xz *(y=0)*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} = 2z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$$



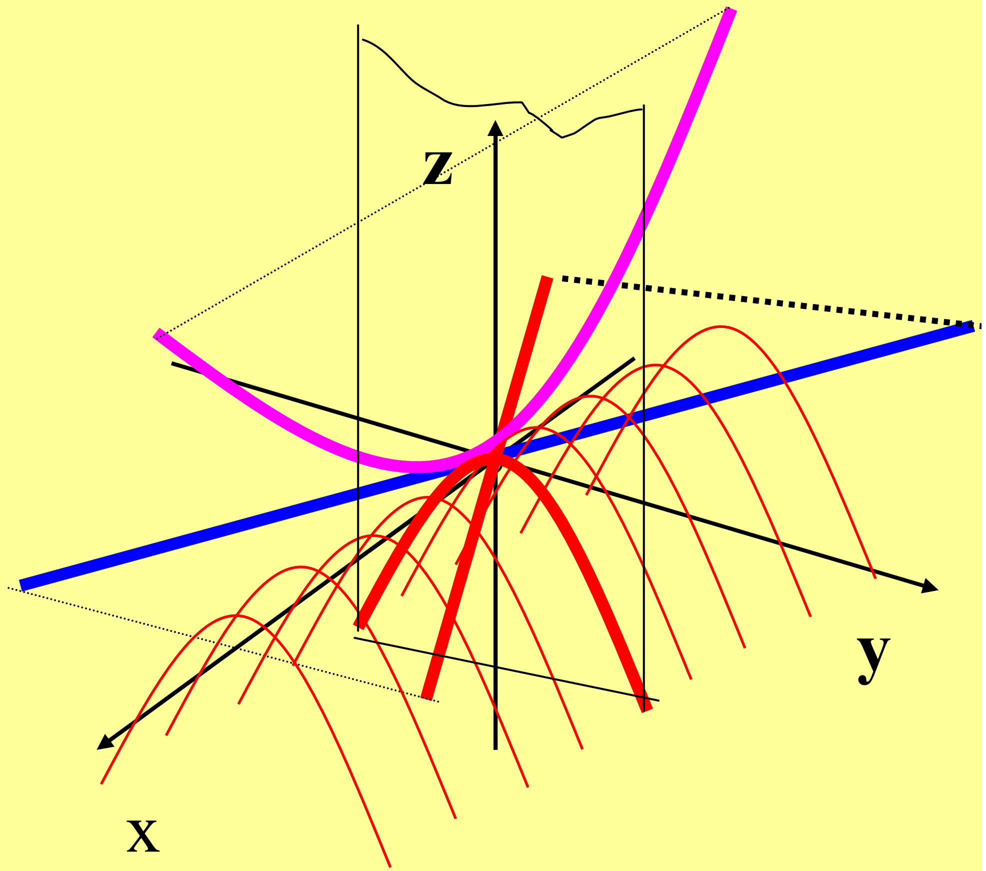
Es un cilindro parabólico cortado con el plano xz, nos da una **parábola** en E^3

4- Intersección con los planos coordenados

c) Intersección con el plano coordenado yz *(x=0)*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{y^2}{q} = 2z \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 = -2qz \\ x = 0 \end{cases}$$



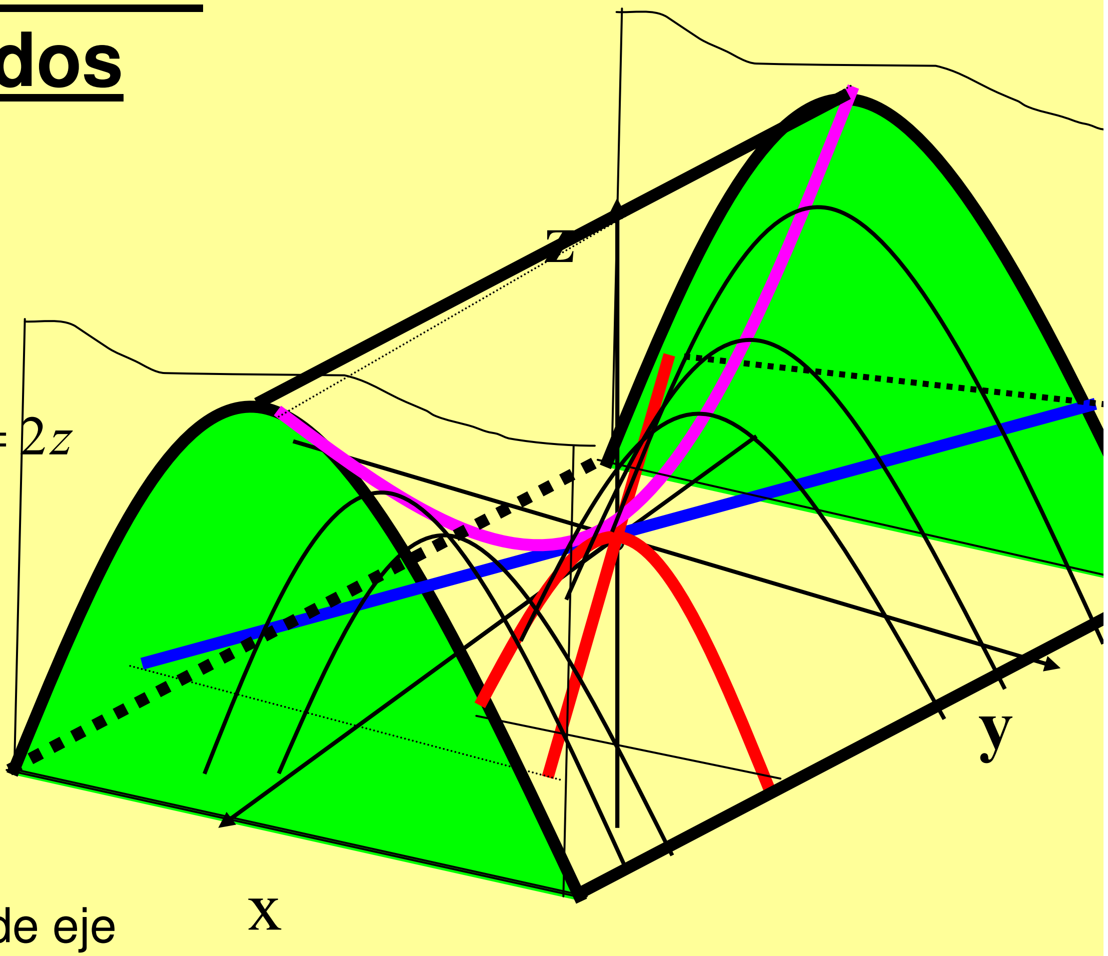
Es un cilindro parabólico de eje z, que abre sus ramas hacia las z negativas cortado con el plano yz, *cuya ecuación es* $x=0$, nos da una **parábola** sobre el plano yz en E³.

5. Intersección con planos // a los planos coordenados

a) Intersección con planos paralelos al plano yz *(x=k)*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ x = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ x = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 = -2qz + \dfrac{k^2 q}{p} \\ x = k \end{cases}$$



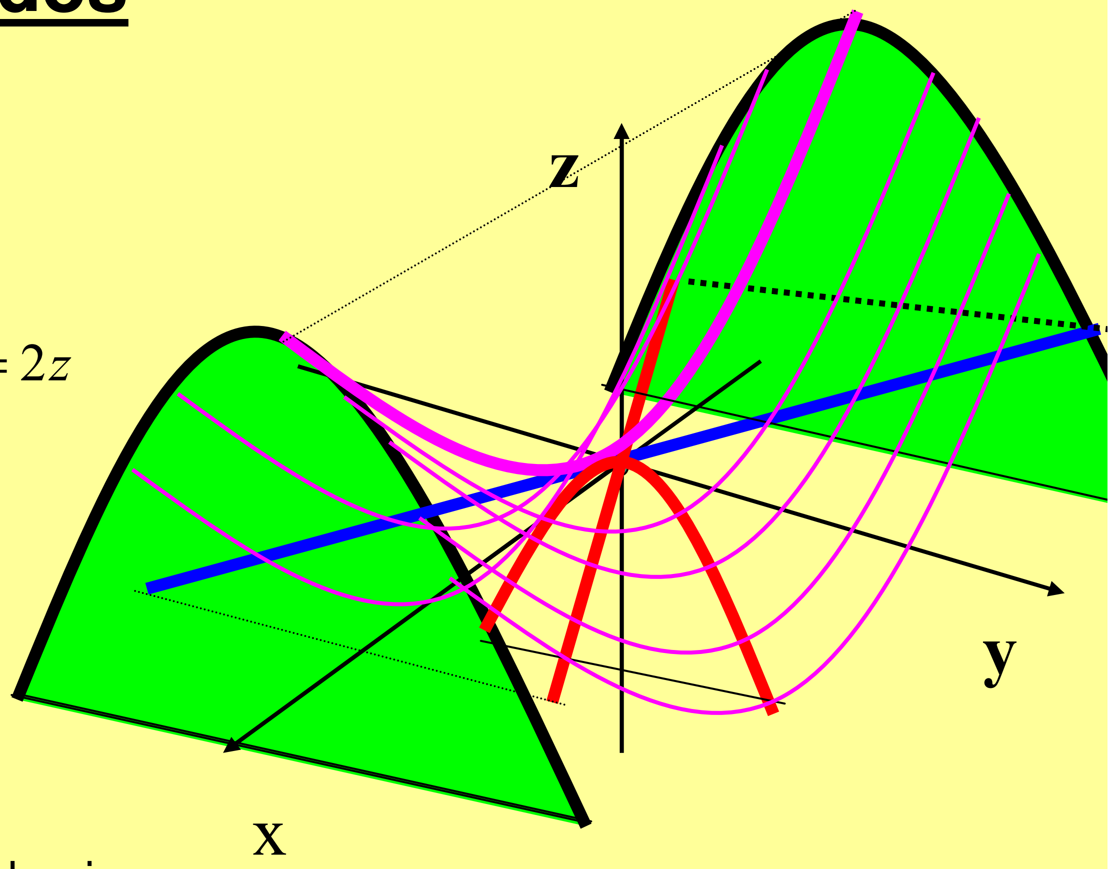
Es un cilindro de directriz parabólica de eje z, que abre sus ramas hacia las z negativas cortado con un plano // al plano *yz*. Para cada valor de k, con independencia de su signo, se obtiene como intersección una **parábola** en E^3 de eje paralelo al eje z.

5. Intersección con planos // a los planos coordenados

b) Intersección con planos paralelos al plano xz *(y=k)*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{k^2}{q} = 2z \\ y = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2pz + \dfrac{k^2 p}{q} \\ y = k \end{cases}$$

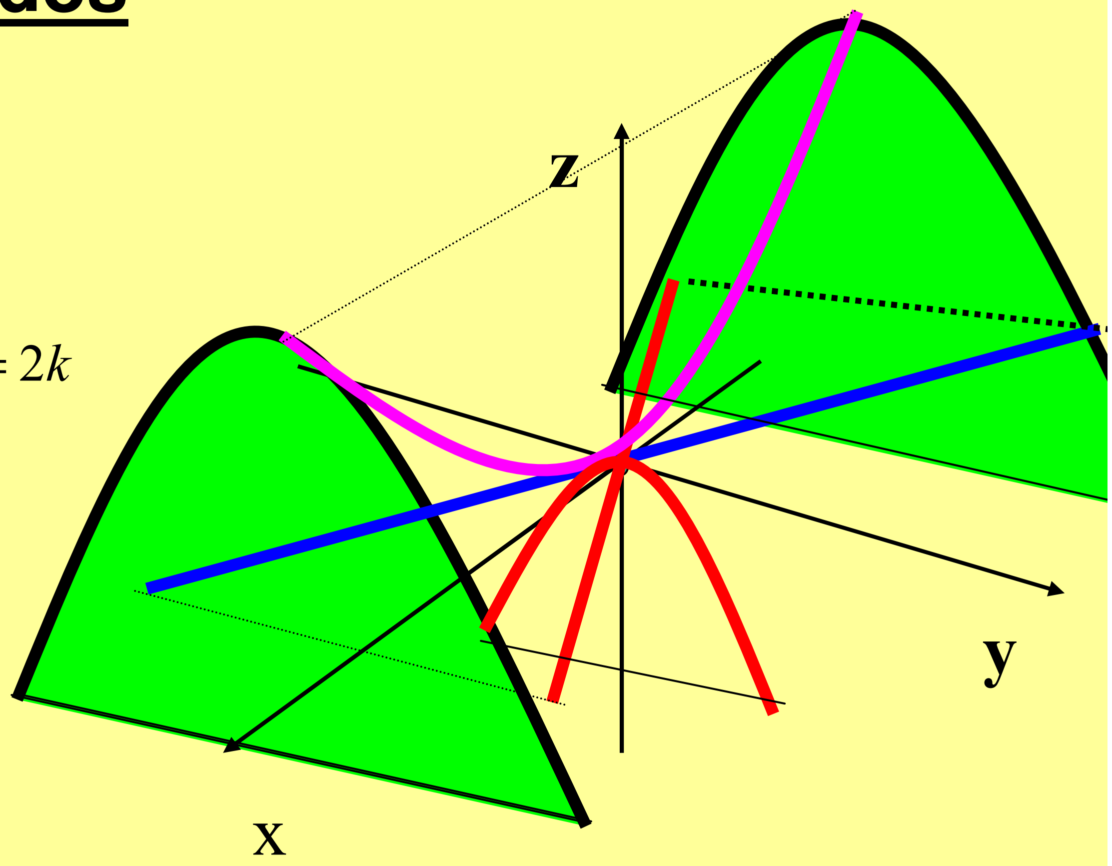


Es un cilindro de directriz parabólica de eje z, que abre sus ramas hacia las z positivas cortado con un plano // al plano *xz*. Para cada valor de k, con independencia de su signo, se obtiene como intersección una **parábola** en E^3 de eje paralelo al eje z.

5. Intersección con planos // a los planos coordenados

c) Intersección con planos paralelos al plano xy *(z=k)*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ z = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2k \\ z = k \end{cases}$$



$\Rightarrow$

- k=0
- k<0
- k>0

si **k=0**

Corresponde al plano xy. Seccion 4 a

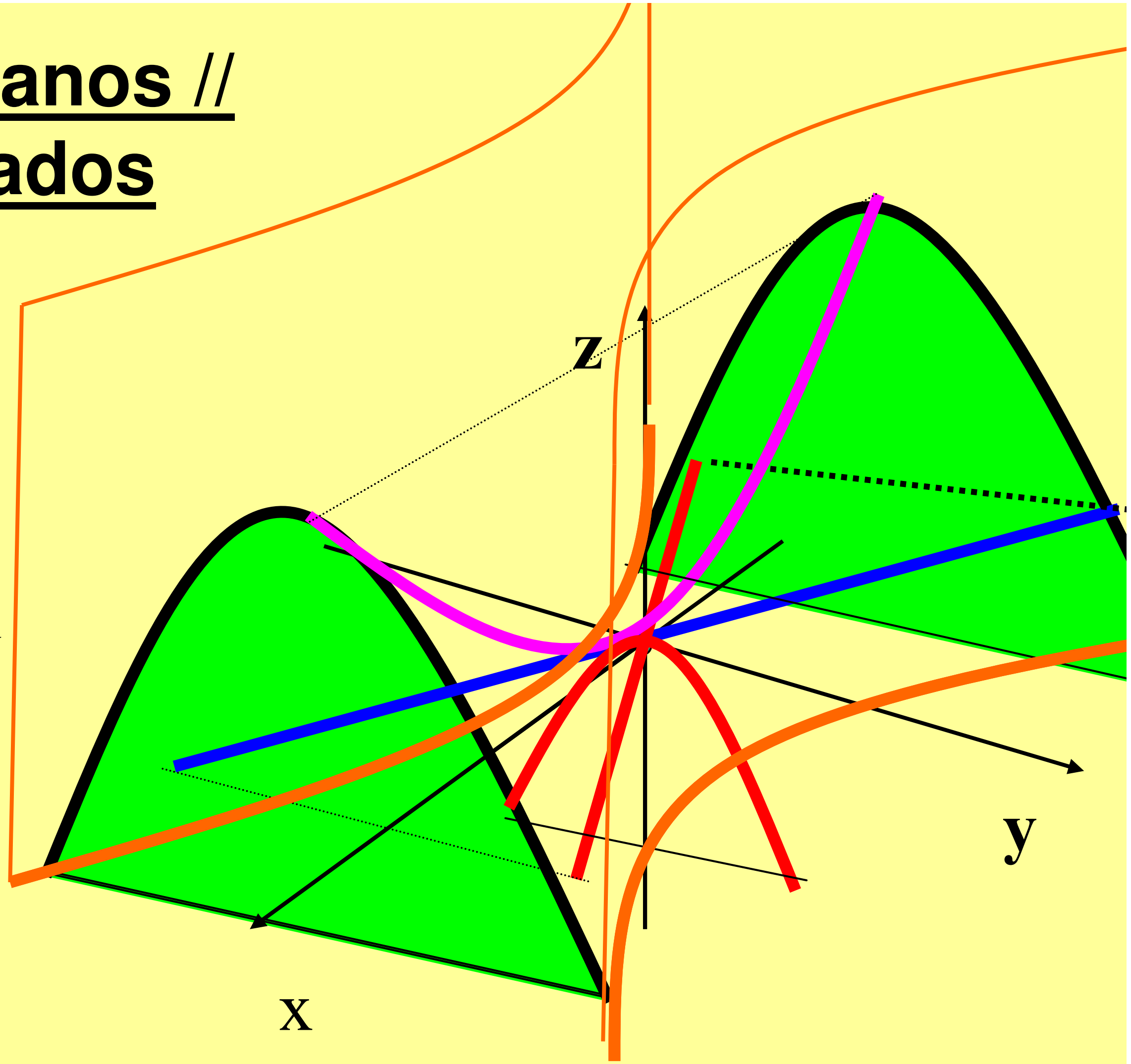
5. Intersección con planos // a los planos coordenados

c) Intersección con planos paralelos al plano xy *(z=k)*

si **k<0**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ z = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = -2k \\ z = -k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2k \\ z = -k \end{cases}$$



Es un cilindro de directriz hiperbólica cortado con un plano // al plano *xy,* la intersección es una **hipérbola** en E[3] ubicada en un plano paralelo al plano *xy* de eje y.

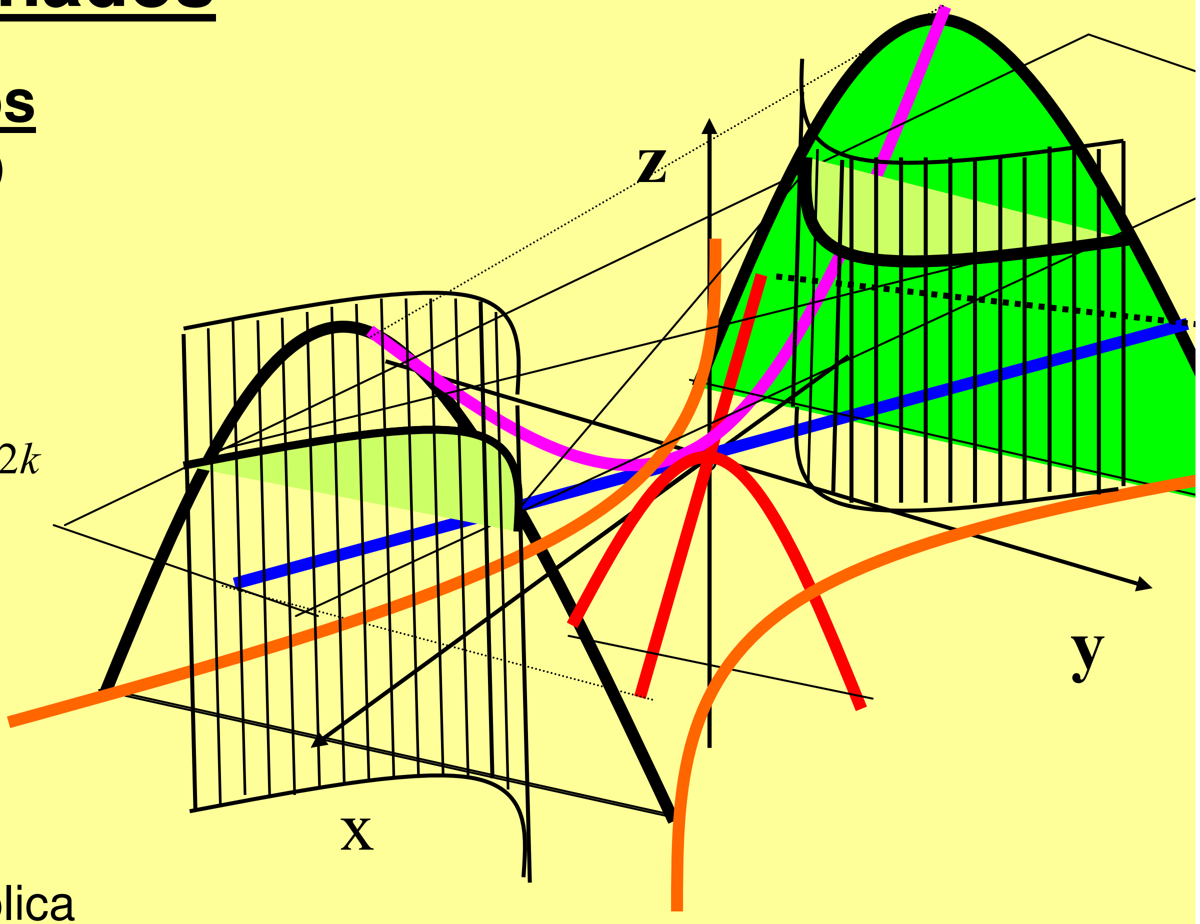
5. Intersección con planos // a los planos coordenados

c) Intersección con planos paralelos al plano xy $(z=k)$

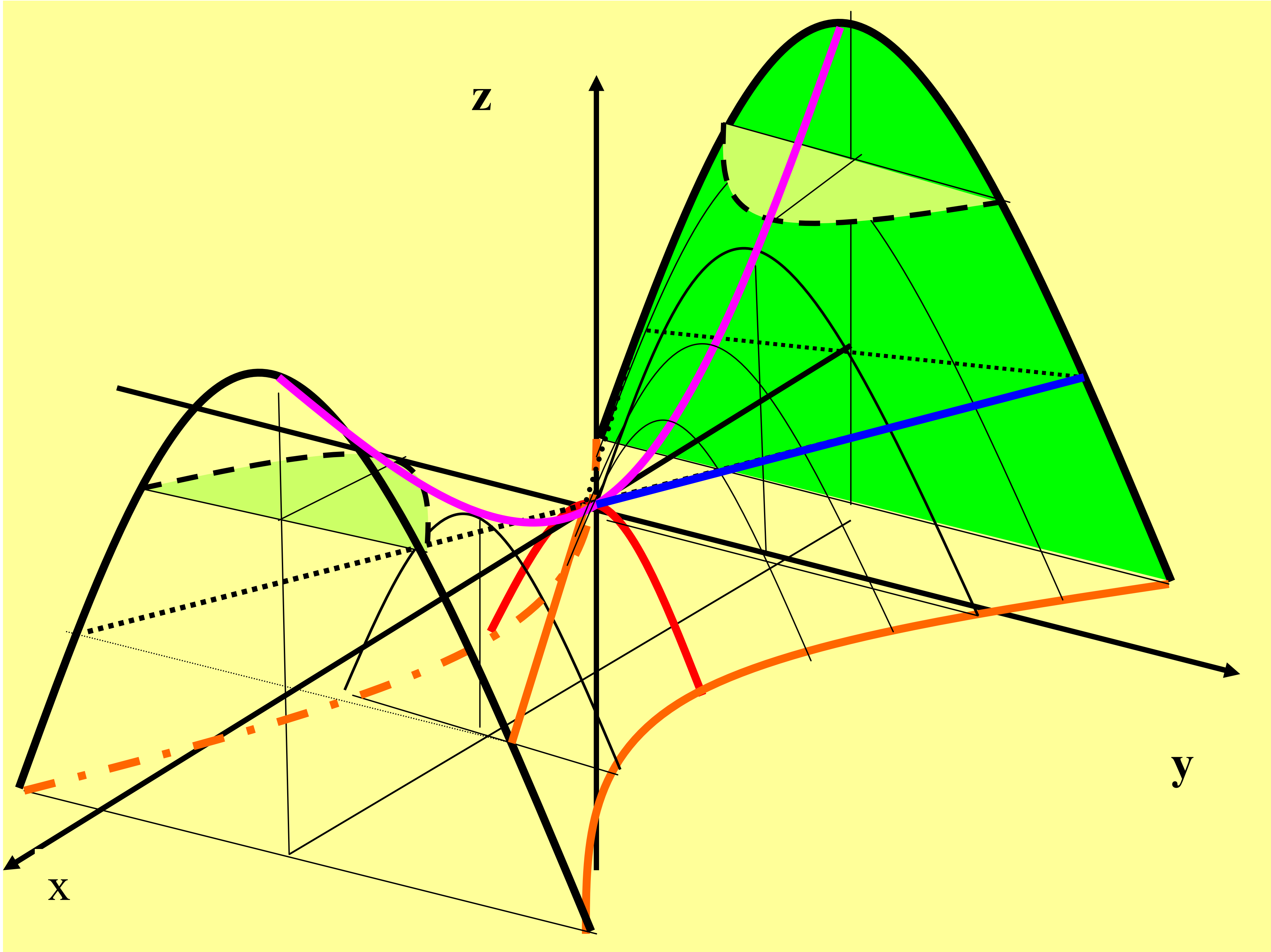
si **k>0**

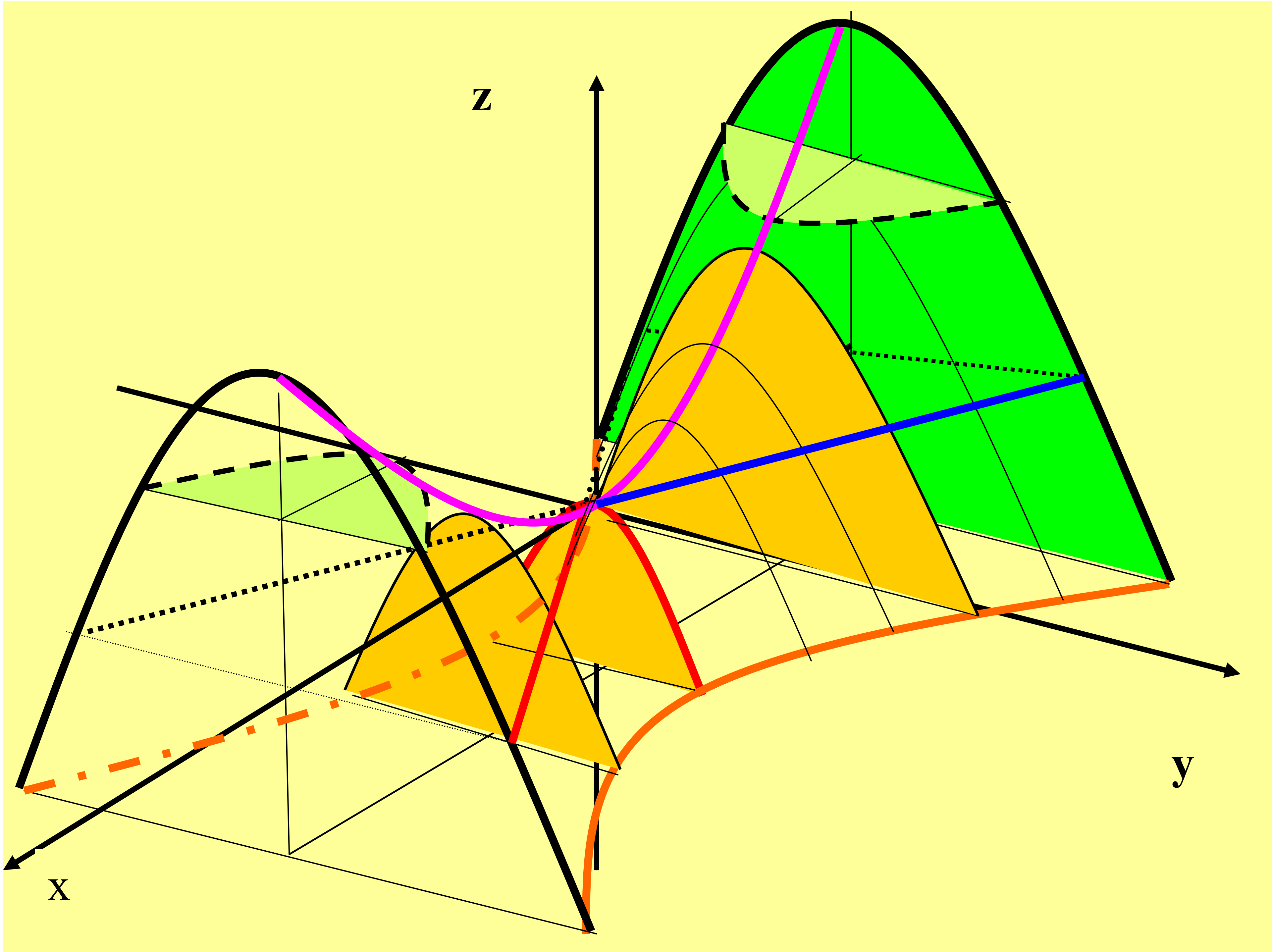
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ z = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2k \\ z = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2k \\ z = k \end{cases}$$



Es un cilindro de directriz hiperbólica cortado con un plano // al plano xy, la intersección es una **hipérbola** en E^3 ubicada en un plano paralelo al plano xy de eje x.

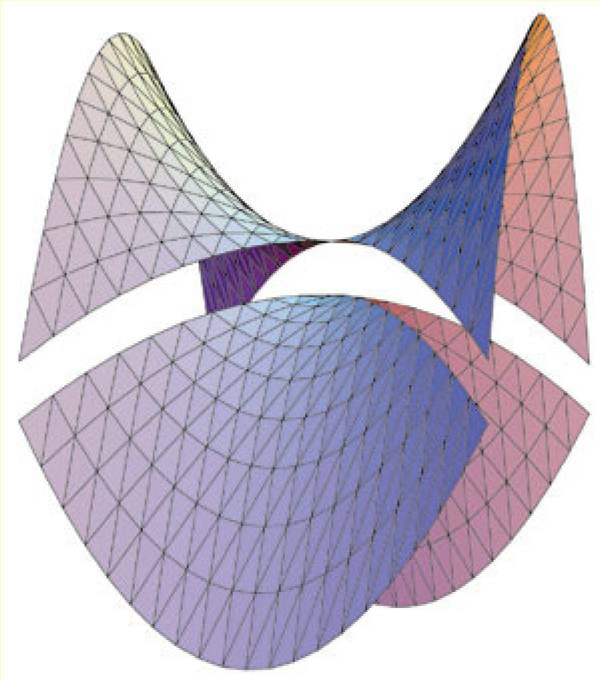

z
y
x


z
y
x

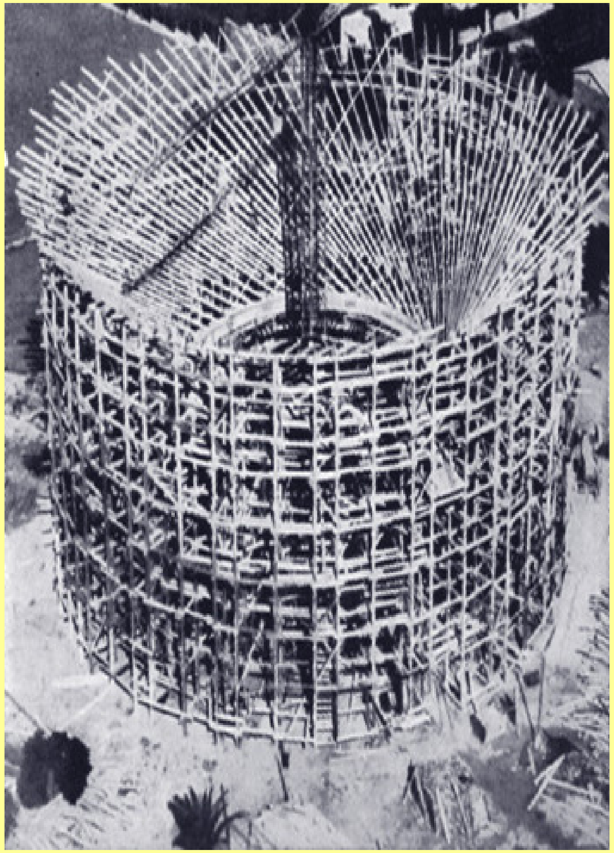
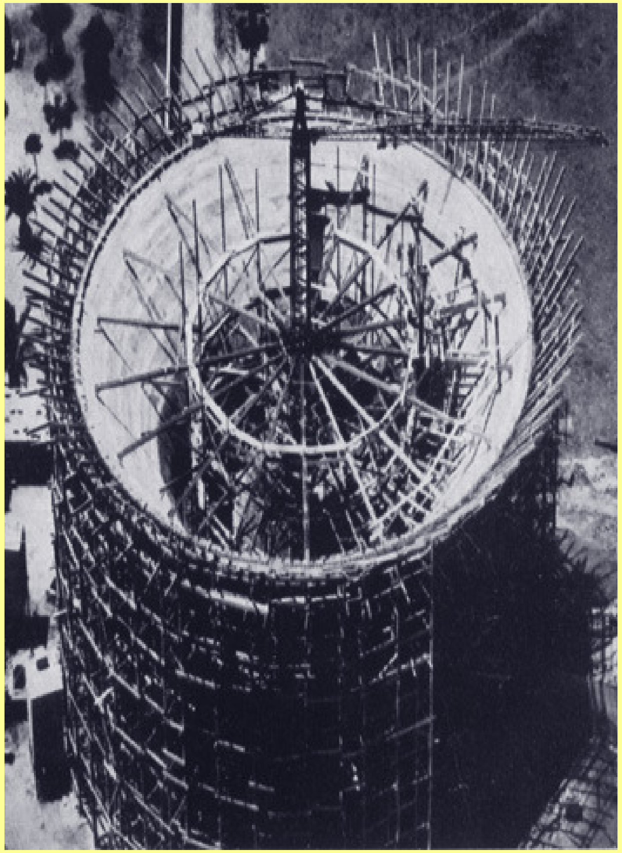
La geometría en la ejecución de las superficies no complica, sino que simplifica la construcción"

A. Gaudí

L'Oceanogràfic de la Ciudad de las Artes y de las Ciencias de Valencia, durante su construcción.



Restaurante Los Manantiales del parque de Choximilco en la ciudad de México. El techo está formado por ocho paraboloides hiperbólicos.


Puente peatonal que está en la calle Corporation de Manchester, Inglaterra.
Hiperboloide de una hoja

El castillo de agua en Fedala (Marruecos), diseñado por Torroja, tiene la forma de un hiperboloide de una hoja, el cual puede ser precomprimido a lo largo de sus dos conjuntos de rectas generatrices

Basílica de Brasilia

Planetario de Buenos Aires

Arco Gateway en San Luis
Missouri (Estados Unidos),

www.frlp.utn.edu.ar/materias/algebra

FIN