ALGEOMETRÍA

SUPERFICIES

Autores: Ing. Carlos Alfredo López; Prof. Ricardo Massucco
Colaboración: Ing. Viviana Cappello; Ing. Carlos Chong Arias;
Ing. Romina Istvan

Introducción:

El estudio de las superficies y curvas en tres dimensiones resulta de interés no solamente para los matemáticos, sino también para los Arquitectos y los Ingenieros; los primeros a los efectos de lograr diseños artísticos y armoniosos, los segundos con el objeto de encontrar estructuras resistentes compatibles con el diseño realizado.

En el capítulo en el cual se trató la problemática de la recta y el plano, resolvimos la representación gráfica de una superficie expresada analíticamente mediante una ecuación de la forma:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

En el espacio tridimensional, una superficie cualquiera puede describirse de la forma más general como una

$$F(x, y, z) = 0$$

Existen algunos casos particulares para los cuales la representación de una ecuación de este tipo no resulta una superficie; veamos algunos ejemplos:

a) **la ecuación** $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ **se satisface únicamente para las coordenadas que corresponden al origen del sistema de referencia.**

b) **la ecuación** $x^2 + y^2 = 0$ **tiene como lugar geométrico los puntos del eje z;**

c) **la ecuación** $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ **no se satisface para ningún punto real.**

La dificultad que representa comprender los problemas geométricos del espacio tridimensional ha potenciado nuestro esfuerzo con el objeto de lograr el mejoramiento de los mecanismos con que se imparten esos temas desde el punto de vista didáctico.

Entre los problemas que se presentan en el espacio tridimensional, con excepción de los planos, la superficie esférica, los

cilindros y los conos, cuyo estudio es relativamente sencillo ya que pueden definirse con facilidad como lugares geométricos, resulta de particular interés obtener una metodología que permita, a través del conocimiento de su correspondiente ecuación, la generación gráfica de la forma de las superficies

Desde hace algunos años venimos utilizando para el estudio de las superficies que tienen su ámbito de desarrollo en dicho espacio, una metodología generativa de las mismas que tiene fundamento por su analogía, con el mecanismo teórico de la Tomografía Computada que se utiliza en Medicina.

En prácticamente la totalidad de la literatura que trata el tema, pueden verse "*dibujadas*" las superficies y un "*estudio analítico*" de las mismas consistente en un conjunto de fórmulas que sólo sirven a los efectos de "verificar" la validez del gráfico presentado; dicho de otra forma, "*en casi todos los casos se efectúa la presentación de figuras que anticipan, sin construcción analítica acorde previa, la forma geométrica a obtener*".

Ello conduce ineludiblemente a "justificar" la correspondencia de una gráfica preelaborada con su ecuación, lo que implica un estudio del tema "contra natura" que nuestro esquema de razonamiento pretende desterrar.

El método que proponemos consiste en intersecar la superficie que se estudia "*cuya forma nos es desconocida*" con una recta o un plano, "tratando" de visualizar cada intersección de modo tal que nos permita ir "generando" la superficie paso a paso.

El primer inconveniente que se presenta es que al no conocerse la forma de la superficie, no resulta posible visualizar la intersección de la superficie que se estudia con una recta o con un plano; esta dificultad nos ha hecho buscar un decodificador (al igual que en la televisión para ver los canales codificados).

Dicho decodificador se obtiene reemplazando el sistema de ecuaciones mixto (*expresión analítica de la curva común a ambas superficies*) mediante una combinación lineal de sus ecuaciones, por otro sistema de ecuaciones equivalente (es decir, que tenga la misma intersección) en el cual una de las ecuaciones resulte ser la de un cilindro o bien la de una cuádrica "degenerada" (*por ejemplo un par de planos*), lográndose de este modo, al cortar la superficie de reemplazo con una recta o con un plano, "ver" de una manera sencilla la forma de la intersección.

Este razonamiento tiene fundamento analítico si pensamos que en el espacio tridimensional una superficie tiene como ecuación completa de segundo grado la expresión

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

y que si la intersecamos con un plano paralelo a un plano coordenado, por ejemplo con un plano paralelo al plano xy cuya ecuación es z = k, resulta el sistema:

$$\begin{cases} Ax^2 + By^2 + Ck^2 + Dxy + Ekx + Fky + Gx + Hy + Ik + J = 0 \\ z = k \end{cases}$$

que ordenado convenientemente:

$$\begin{cases} Ax^2 + Dxy + By^2 + Ck^2 + (Ek + G)x + (Fk + H)y + Ck^2 + Ik + J = 0 \\ z = k \end{cases}$$

corresponde:

la primera de las ecuaciones, a una superficie de segundo grado en dos variables de E^3 : un cilindro recto por carecer de una de las variables; en este caso z.

la segunda a un plano paralelo al plano coordenado xy; la intersección correspondiente es una cónica o, como caso particular, una cónica degenerada.

<u>DESARROLLO</u>:

Sabido es que en Geometría existen dos problemas fundamentales que pueden plantearse de manera simple con los siguientes esquemas:

1) **Dado un lugar geométrico por medio de las condiciones que verifican solamente los puntos que le pertenecen, hallar su ecuación.**
2) **Dada la ecuación de un lugar geométrico, construir su gráfica.**

En el espacio bidimensional, es decir en el plano, *(como hemos visto al desarrollar el capítulo sobre Secciones Cónicas)* no existe dificultad de entendimiento porque la percepción de este espacio es visual y en consecuencia puede adoptarse cualquiera de los esquemas descriptos: siguiendo el primero de ellos, podemos definir como lugar geométrico una línea y, a partir de esta definición obtener la correspondiente ecuación, mientras que, de acuerdo a la segunda metodología podemos escribir la ecuación general de segundo grado en dos variables: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ y luego, mediante una traslación y una rotación adecuadas llegar a la ecuación canónica que explicitada, permite bajo ciertas condiciones de entorno (campo de definición, etc...) graficar la curva estudiada.

Las ecuaciones canónicas de las secciones cónicas se presentan, de acuerdo a la relación entre sus coeficientes, bajo los siguientes aspectos:

Ecuaciones de las cónicas con centro.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 & \text{circunferencia.} \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & \text{elipse.} \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & \text{hipérbola.} \end{cases}$$

y

ecuación de la cónica sin *centro*:

$$\{ x^2 = 2py \qquad \text{parábola.}$$

En el espacio tridimensional no resulta posible describir de manera simple todas las superficies como lugar geométrico y en consecuencia el recurso abordable es escribir la ecuación general de segundo grado en tres variables,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

y luego, mediante rotaciones y traslaciones adecuadas; utilizando el método de los invariantes o bien diagonalizando la matriz de los coeficientes de la forma cuadrática (método que desarrollaremos en el capítulo sobre Transformaciones Lineales) llegar a:

$$A'' x''^2 + B'' y''^2 + C'' z''^2 + J'' = 0 \quad \textit{(forma canónica de las cuádricas con centro).}$$

ó

$$A'' x''^2 + B'' y''^2 + I'' z'' = 0 \quad \textit{(forma canónica de las cuádricas sin centro).}$$

Los casos particulares que pueden presentarse provienen de las distintas combinaciones de signos y valores absolutos entre los coeficientes de los términos cuadráticos.

Para las superficies cuádricas con centro pueden escribirse las ecuaciones:

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1 \quad \textit{esfera}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \textit{elipsoide}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \textit{hiperboloide de una hoja}$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \textit{hiperboloide de dos hojas}$$

y para las superficies cuádricas sin centro *(con p y q positivos)*:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad \textit{paraboloide elíptico}$$
$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad \textit{paraboloide hiperbólico}$$

resultando en estos casos imposible desde el punto de vista práctico, utilizar la metodología de explicitar las ecuaciones para poder graficar los lugares geométricos correspondientes por la gran cantidad de puntos que debemos dibujar a efectos de aproximar la idea de la forma de la superficie.

Además, cuando queremos representar objetos que tienen su existencia en el espacio tridimensional, se hace necesaria la reducción de una de las dimensiones para dibujar en el papel, lo que obliga a establecer códigos de visualización como las perspectivas, proyecciones, etc.

Surge entonces, como alternativa válida, la idea de *"discutir"* la ecuación para *"encontrar la forma"*: el método correspondiente puede describirse como sigue:

1) **Estudio de la simetría, por observación de la ecuación correspondiente.**
2) **Verificación de la pertenencia o no del origen de coordenadas.**
3) **Estudio de la intersección con los ejes coordenados.**
4) **Estudio de la intersección con los planos coordenados.**
5) **Estudio de la intersección con planos paralelos a los planos coordenados.**

Resulta imprescindible saber diferenciar correctamente que representa una determinada ecuación cuando la misma es considerada en diferentes espacios. Al respecto, debe internalizarse el concepto de que, en el espacio tridimensional, <u>una curva cualquiera sólo puede expresarse en forma analítica como intersección de al menos dos de las infinitas superficies que se cortan según ella</u>: "*cambiar una superficie de forma desconocida por otra de forma conocida, que contenga a la misma línea y*

nos permita <u>ver la forma de la intersección</u>, es la razón de ser del método que vamos a describir" .

Para ello, necesitamos del conocimiento previo de las siguientes fórmulas:

a) <u>Ecuaciones correspondientes al espacio bidimensional (E^2):</u>

a.1) <u>Ecuaciones canónicas de las cónicas</u>.

Las ecuaciones correspondientes han sido recordadas precedentemente en este mismo capitulo.

a.2) <u>Ecuaciones de las cónicas desplazadas</u>:

$$\begin{cases} (x-h)^2+(y-k)^2=r^2 & \textit{circunferencia con centro en (h,k)} \\ \dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1 & \textit{elipse con centro en (h,k)} \\ \dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1 & \textit{hipérbola con centro en (h,k)} \\ (x-h)^2=2p(y-k) & \textit{parábola con vértice en (h,k)} \end{cases}$$

a.3) <u>Ecuaciones de un par de rectas</u>:

$$\{\ x^2-y^2=0 \Leftrightarrow (x+y)\bullet(x-y)-0$$

b) <u>Ecuaciones del espacio tridimensional (E^3):</u>

b.1) <u>Ecuación general del plano y sus casos particulares:</u>

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 & \textit{Ecuación general del plano.} \\ Ax+By+Cz=0 & \textit{Ecuación de un plano que contiene al origen del sistema.} \\ Ax+By+D=0 & \textit{Ecuación de un plano paralelo al eje z (la forma es análoga} \\ & \textit{a la de una recta en } E^2\textit{).} \\ Ax+By=0 & \textit{Ecuación de un plano que contiene al eje z (la forma es análoga} \\ & \textit{a la de una recta de } E^2 \textit{ que contiene al origen).} \\ Ax+D=0 & \textit{Ecuación de un plano paralelo al plano coordenado yz (la forma} \\ & \textit{es análoga a la de una recta de } E^2 \textit{ paralela al eje y).} \\ Ax=0 & \textit{Ecuación del plano coordenado yz (la forma es análoga a la de} \\ & \textit{la ecuación del eje y en } E^2\textit{).} \end{cases}$$

b.2) Ecuaciones de un par de planos:

$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+y) \bullet (x-y) = 0$ **(observar que la forma es análoga a la del par de rectas para E²**).

b.3) Ecuaciones de cilindros y conos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 & \textit{ecuación de un cilindro de directriz circular de eje } z \textit{ (análoga a la ecuación de la circunferencia en } E^2 \textit{.} \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & \textit{ecuación de un cilindro de directriz elíptica, de eje } z \textit{ (análoga a la ecuación de la elipse en } E^2 \textit{).} \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & \textit{ecuación de un cilindro de directriz hiperbólica, de eje } z \textit{ (análoga a la ecuación de la hipérbola en } E^2 \textit{.} \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0 & \textit{ecuación conjunta de un par de planos:} \rightarrow \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) \bullet \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 & \textit{ecuación de un cono de eje } z. \end{cases}$$

Con el conocimiento previo de las ecuaciones que terminamos de describir y sus correspondientes formas, estamos en condiciones de encarar la discusión de cualquier superficie cuádrica.