ESTUDIO DE LAS SUPERFICIES MEDIANTE LA DISCUSIÓN DE SUS ECUACIONES

1) ESTUDIO DE LA SUPERFICIE ESFÉRICA

Como hemos dicho en la introducción de este capítulo, al rotar y trasladar adecuadamente los ejes coordenados, para el caso particular de los términos cuadráticos con coeficientes iguales, se obtiene la ecuación

$$\boxed{\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1}$$

Realicemos la discusión de la misma:

1 - Estudio de la Simetría

Para realizar el estudio de la Simetría verificamos que si la ecuación de una superficie no se altera cuando se cambia de signo de:

- las tres variables, la superficie es simétrica con respecto al origen de coordenadas.
- dos de sus variables, la superficie es simétrica con respecto al eje coordenado a lo largo del cual se mide la variable cuyo signo no se cambio.
- una de las variables, la superficie es simétrica con respecto al plano coordenado a partir del cual se mide esa variable.

a) Simetría respecto a los planos coordenados;

Simetría respecto al plano xy: *(cambiamos el signo de z)*

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{(-z)^2}{r^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable *z*, la superficie resulta **simétrica respecto al plano xy**.

Simetría respecto al plano xz; *(cambiamos el signo de y)*

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{(-y)^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable *y*, la superficie resulta **simétrica respecto al plano xz**.

Simetría respecto al plano yz; *(cambiamos el signo de x)*

$$\frac{(-x)^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable *x,* la superficie resulta **simétrica respecto al plano yz**.

b) Simetría respecto a los ejes coordenados

Simetría respecto al eje x; *(cambiamos los signos de las variables y, z)*

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{(-y)^2}{r^2}+\frac{(-z)^2}{r^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables *y* y *z*, la superficie es **simétrica respecto al eje x**.

Simetría respecto al eje y: *(cambiamos los signos de las variables x, z)*

$$\frac{(-x)^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{(-z)^2}{r^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables *x* , *z*, la superficie es **simétrica respecto al eje y**.

Simetría respecto al eje z; *(cambiamos los signos de las variables x, y)*

$$\frac{(-x)^2}{r^2}+\frac{(-y)^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables *x* e *y*, la superficie es **simétrica respecto al eje z**.

c) Simetría respecto al origen de coordenadas; *(cambiamos los signos de las tres variables*

$$\frac{(-x)^2}{r^2}+\frac{(-y)^2}{r^2}+\frac{(-z)^2}{r^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las tres variables, la superficie resulta **simétrica respecto al origen de coordenadas.**

2- Verificar si la superficie contiene o no el Origen del Sistema de Coordenadas

Reemplazando por el punto P(0,0,0) en la ecuación:

$$\frac{0^2}{r^2}+\frac{0^2}{r^2}+\frac{0^2}{r^2}\neq 1$$

$$0\neq 1$$

se deduce, que la superficie **no contiene al origen de coordenadas**.

***3-* Intersección con los ejes coordenados**

a) Intersección con el eje x

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1\\ y=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{r^2}=1\\ y=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=r^2\\ y=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm r\\ y=0\\ z=0\end{cases}$$

O sea que:
x = $\pm r$; y = z = 0 $\Rightarrow$ A_1 (r, 0, 0) $\wedge$ A_2 (-r, 0, 0) se trata de dos puntos simétricos respecto del origen, ubicados sobre el eje x.

b) Intersección con el eje y

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1\\ x=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{y^2}{r^2}=1\\ x=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2=r^2\\ x=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\pm r\\ x=0\\ z=0\end{cases}$$

O sea que: y = $\pm r$; x = z = 0 $\Rightarrow$ B_1 (0, r, 0) $\wedge$ B_2 (0, -r, 0) se trata de dos puntos simétricos respecto del origen, ubicados sobre el eje y

c) Intersección con el eje z

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{z^2}{r^2}=1 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2=r^2 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\pm r \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

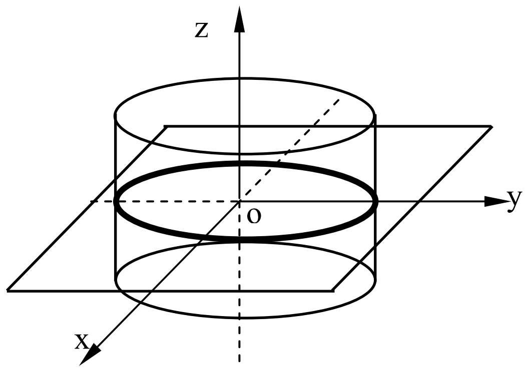
O sea que: z = $\pm r$; x = y = 0 $\Rightarrow$ C_1 (0, 0, r) $\wedge$ C_2 (0, 0, -r) se trata de dos puntos simétricos respecto del origen, ubicados sobre el eje z.

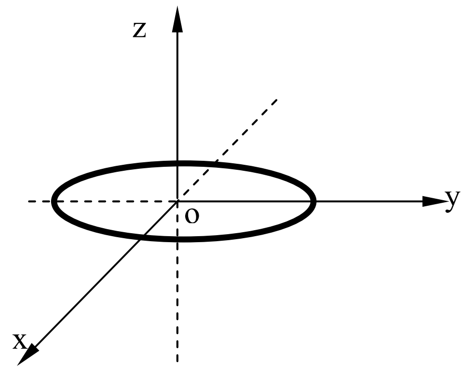
4- Intersección con los planos coordenados

a) Intersección con el plano coordenado "xy" (z=0)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro circular de radio r, cortado con el plano "xy"; la intersección es una circunferencia sobre el plano coordenado "xy"

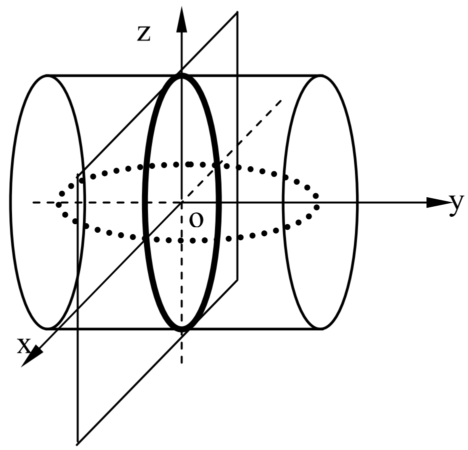


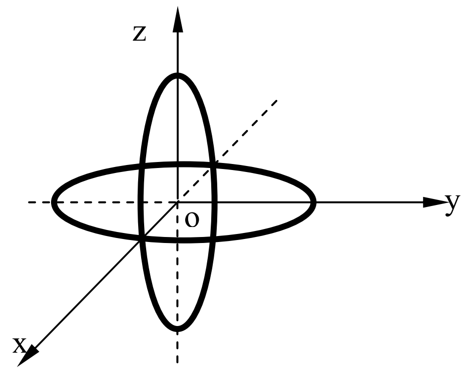


b) Intersección con el plano coordenado xz (y=0)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro circular de radio r, cortado con el plano "xz"; la intersección es una circunferencia sobre el plano coordenado "xz"

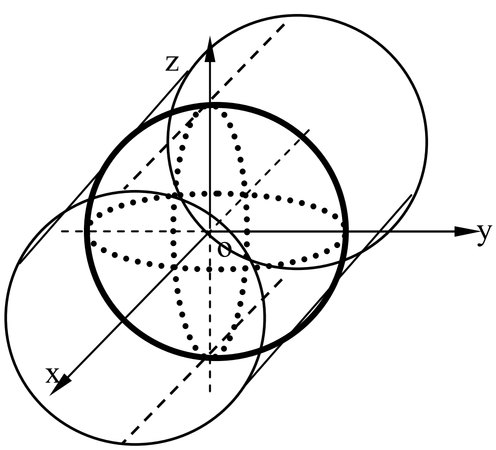


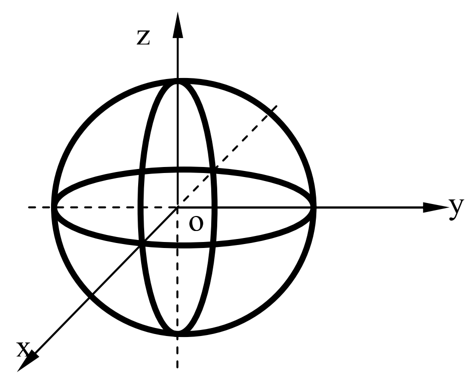


c) <u>Intersección con el plano coordenado "yz"</u> (x=0)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1 \\ x=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro circular de radio r, cortado con el plano "yz"; la intersección es una circunferencia sobre el plano coordenado "yz"





5. Intersección con planos paralelos a los planos coordenados

a) *Intersección con planos paralelos al plano "yz" (x=k)*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1 \\ x=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1 \\ x=k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1-\dfrac{k^2}{r^2} \\ x=k \end{cases}$$

Si k = 0

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1-\dfrac{0}{r^2} \\ x=k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1 \\ x=k=0 \end{cases}$$

La intersección es la correspondiente al plano "yz", ya estudiada.

Si 0 < lkl < r

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1-\dfrac{k^2}{r^2} \\ x=k \end{cases}$$

Debido a que: $1-\dfrac{k^2}{r^2} > 0$ obtenemos un cilindro circular cortado con un plano paralelo al plano coordenado yz

Para cada valor de k, independientemente de su signo, se obtiene como intersección una circunferencia. Los radios de las circunferencias obtenidas disminuyen a medida que lkl aumenta.
Actividad: interpretar geométricamente esta intersección.

Si lkl = r

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1-\dfrac{r^2}{r^2} \\ x=|k|=r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=0 \\ x=|k|=r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2+z^2=0 \\ x=|k|=r \end{cases}$$

En este caso, la única posibilidad para que $y^2+z^2=0$ es que los valores de **y**, y los valores de **z** sean iguales a 0, lo que sucede a lo largo del eje x, recta del espacio tridimensional que tiene como ecuaciones y = 0 $\wedge$ z = 0. Además $|k|=r$ equivale a $x=r \wedge x=-r$. Por todo ello, las intersecciones son los puntos de coordenadas P_1 (r, 0, 0) y P_2 (-r, 0, 0) respectivamente.

<u>Si lkl > r</u>

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1-\dfrac{k^2}{r^2} \\ x=k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=nro\_negativo \\ x=k \end{cases}$$

Debido a que: $1-\dfrac{k^2}{r^2}$ *< 0* no existe intersección entre las superficies.

b) <u>Intersección con planos paralelos al plano "xz"</u> (y=k)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1 \\ y=k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{k^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1 \\ y=k \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1-\dfrac{k^2}{r^2} \\ y=k \end{cases}$$

<u>Si k = 0</u>

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1-\dfrac{0}{r^2} \\ y=k=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1 \\ y=k=0 \end{cases}$$

La intersección es la correspondiente al plano "xz", ya estudiada.

<u>Si 0 < lkl < r</u>

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1-\dfrac{k^2}{r^2} \\ y=k \end{cases}$$

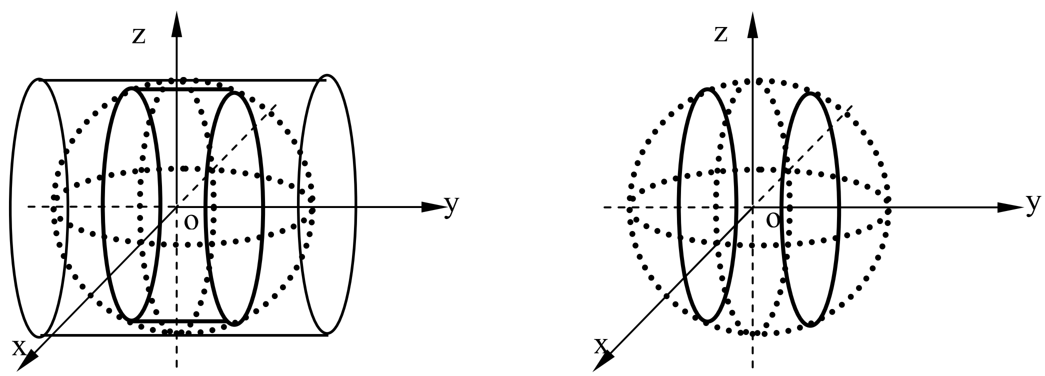
Debido a que: $1-\frac{k^2}{r^2}$ > 0, obtenemos un cilindro circular cortado con un plano paralelo al plano coordenado “xz”

Para cada valor de k, independientemente de su signo, se obtiene como intersección una circunferencia. Los radios de las circunferencias obtenidas disminuyen a medida que lkl aumenta.

Si lkl = r

$$\begin{cases} \frac{x^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1-\frac{r^2}{r^2} \\ y=|k|=r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=0 \\ y=|k|=r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+z^2=0 \\ y=|k|=r \end{cases}$$

En este caso, la única posibilidad en que $x^2+z^2=0$ En concordancia con el análisis anteriormente realizado para la intersección con planos paralelos al plano “yz” se obtienen dos puntos de coordenadas P_1 (0, r, 0) y P_2 (0, -r, 0) respectivamente.



Si lkl > r

$$\begin{cases} \frac{x^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1-\frac{k^2}{r^2} \\ y=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=nro\_negativo \\ y=k \end{cases}$$

Debido a que: $1-\frac{k^2}{r^2}$ < 0, no existe intersección entre las superficies.

c) <u>Intersección con planos paralelos al plano "xy"</u> (z=k)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{z^2}{r^2}=1 \\ z=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{k^2}{r^2}=1 \\ z=k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}=1-\dfrac{k^2}{r^2} \\ z=k \end{cases}$$

<u>Si k = 0</u>

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}=1-\dfrac{0}{r^2} \\ z=k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}=1 \\ z=k=0 \end{cases}$$

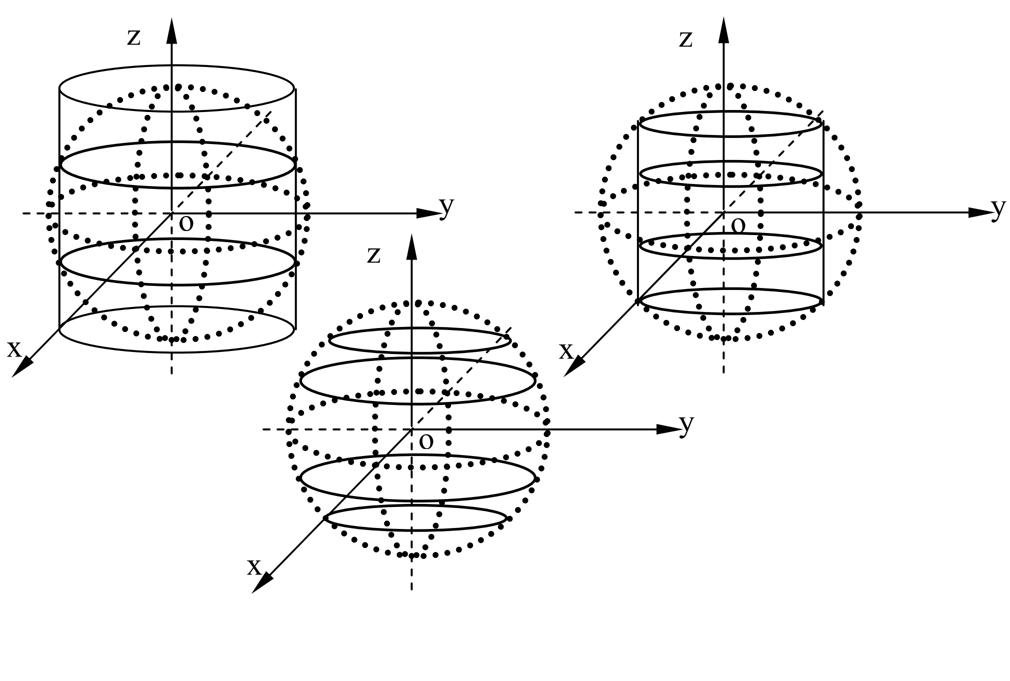
Intersección correspondiente al plano "xy", ya estudiada.

<u>Si 0 < lkl < r</u>

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}=1-\dfrac{k^2}{r^2} \\ z=k \end{cases}$$

Debido a que: $1-\dfrac{k^2}{r^2}$ > 0, obtenemos un cilindro circular cortado con un plano paralelo al plano coordenado "xy".

Para cada valor de k, independientemente de su signo, se obtiene como intersección una circunferencia. Los radios de las circunferencias obtenidas disminuyen a medida que lkl aumenta.



<u>Si |k| = r</u>

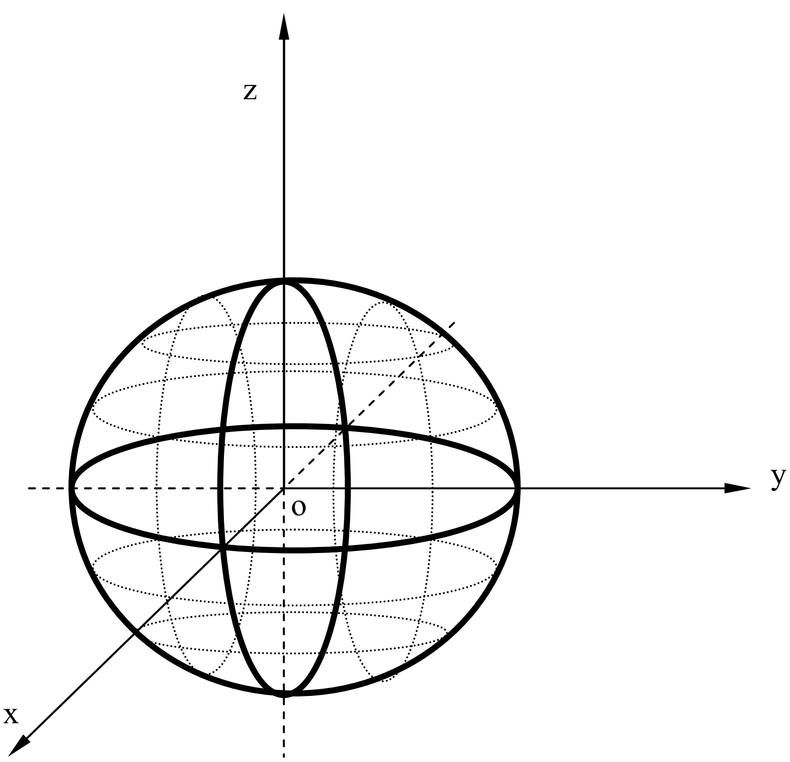
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1 - \dfrac{r^2}{r^2} \\ z = |k| = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 0 \\ z = |k| = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ z = |k| = r \end{cases}$$

<u>Actividad</u>: demostrar que la intersección da dos puntos de coordenadas P_1 (0, 0, r) y P_2 (0, 0, -r), respectivamente.

<u>Si |k| > r</u>

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1 - \dfrac{k^2}{r^2} \\ z = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = nro\_negativo \\ z = k \end{cases}$$

Debido a que: $1 - \dfrac{k^2}{r^2} < 0$, no existe intersección entre las superficies.



<u>Nota</u>: la superficie esférica **puede estudiarse también como una superficie de revolución** generada por una circunferencia que gira alrededor de uno cualquiera de sus diámetros.