## ESTUDIO DE LOS CILINDROS.

Por tratarse de **"nuestro elemento decodificador"** para el estudio de cualquier superficie cuádrica y habiendo sido tratado como lugar geométrico, obteniéndose la forma de los mismos, solo haremos el estudio de la simetría para el cilindro de directriz circular, resultando trivial el estudio correspondiente para los distintos casos de cilindros rectos, ya definidos y graficados en páginas 12 y 13 de este capítulo

## ESTUDIO DEL CILINDRO CIRCULAR

$$\boxed{\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1}$$

### 1 - Estudio de la Simetría

#### a) Simetría respecto a los planos coordenados

Simetría respecto al plano xy

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$$

Como la ecuación no contiene a la variable z, concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano xy.

Simetría respecto al plano xz

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{(-y)^2}{r^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable y, concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano xz.

Simetría respecto al plano yz

$$\frac{(-x)^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable x, concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano yz.

**b) Simetría respecto a los ejes coordenados**

Simetría respecto al eje x

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{(-y)^2}{r^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable y y como la ecuación no contiene a la variable z, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al eje x.

Simetría respecto al eje y

$$\frac{(-x)^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable x y como la ecuación no contiene a la variable z, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al eje y.

Simetría respecto al eje z

$$\frac{(-x)^2}{r^2}+\frac{(-y)^2}{r^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables x e y, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al eje z.

**c) Simetría respecto al origen de coordenadas**

$$\frac{(-x)^2}{r^2}+\frac{(-y)^2}{r^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables x e y, y la ecuación no contiene a la variable z, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al origen de coordenadas.

**2- <u>Verificar si la superficie contiene o no el Origen del Sistema de Coordenadas</u>**

Reemplazando por el punto P(0,0,0) en la ecuación:

$$\frac{0^2}{r^2}+\frac{0^2}{r^2}\neq 1$$
$$0\neq 1$$

Se verifica, por lo tanto que la superficie no contiene al origen de coordenadas.

**3- <u>Intersección con los ejes coordenados</u>**

**a) <u>Intersección con el eje x</u>**

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}=1\\ y=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{r^2}=1\\ y=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=r^2\\ y=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ =\pm r\\ y=0\\ z=0\end{cases}$$

O sea que:
x = $\pm r$ ; y = z = 0 $\Rightarrow$ A1 (r, 0, 0) $\wedge$ A2 (-r, 0, 0)

**b) <u>Intersección con el eje y</u>**

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}=1\\ x=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{y^2}{r^2}=1\\ x=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2=r^2\\ x=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y\ =\pm r\\ x=0\\ z=0\end{cases}$$

O sea que: y = $\pm r$ ; x = z = 0 $\Rightarrow$ B1 (0, r, 0) $\wedge$ B2 (0, -r, 0)

**c) <u>Intersección con el eje z</u>**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 0 \neq 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, no hay intersección con el eje z.

**4- <u>Intersección con los planos coordenados</u>**

a) **<u>Intersección con el plano coordenado xy</u> (z=0)**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro circular centrado en el origen de coordenadas de radio r, cortado con el plano xy
Circunferencia sobre el plano coordenado xy

b) **<u>Intersección con el plano coordenado xz</u> (y=0)**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = r^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm r \\ y = 0 \end{cases}$$

Obtenemos dos planos: x = r y x = -r que cortados con el plano y = 0 dan como intersección dos rectas: r1: x = r y r2: x = -r sobre el plano coordenado xz.

c) **<u>Intersección con el plano coordenado yz</u> (x=0)**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{r^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = r^2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm r \\ x = 0 \end{cases}$$

Obtenemos dos planos: y = r e y = -r que cortados con el plano x = 0 dan como intersección dos rectas: r1: y = r e r2: y = -r sobre el plano coordenado yz.

## 5. Intersección con planos paralelos a los planos coordenados

### a) Intersección con planos paralelos al plano yz (x=k)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}=1 \\ x=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}=1 \\ x=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{r^2}=1-\dfrac{k^2}{r^2} \\ x=k \end{cases}$$

**Si k = 0**

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{r^2}=1-\dfrac{0}{r^2} \\ x=k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{r^2}=1 \\ x=k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=r^2 \\ x=k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\pm r \\ x=k=0 \end{cases}$$

Intersección correspondiente al plano coordenado yz
Obtenemos, dos rectas: $r_1$: y = r y $r_2$: y = -r sobre el plano coordenado yz

**Si 0 < k < r**

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{r^2}=1-\dfrac{k^2}{r^2} \\ x=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=\left(1-\dfrac{k^2}{r^2}\right)r^2 \\ x=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=\left(r^2-k^2\right) \\ x=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\pm\sqrt{r^2-k^2} \\ x=k \end{cases}$$

Debido a que: $r^2-k^2 > 0$
Obtenemos, dos planos y = +$\sqrt{r^2-k^2}$ e y = -$\sqrt{r^2-k^2}$ que cortados con el plano x= k dan como intersección dos rectas:
r1: y = +$\sqrt{r^2-k^2}$ y r2: y = -$\sqrt{r^2-k^2}$ respectivamente.

**<u>Si lkl = r</u>**

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{r^2} = 1 - \dfrac{r^2}{r^2} \\ x = |k| = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{r^2} = 0 \\ x = |k| = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \\ x = |k| = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = |k| = r \end{cases}$$

En este caso, obtenemos el plano y= 0 que cortado con los planos x= lkl= r (x = r y x = -r) dan como intersección las rectas x = r y x = -r respectivamente.

**<u>Si lkl > r</u>**

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{r^2} = 1 - \dfrac{k^2}{r^2} \\ x = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{r^2} = nro\_negativo \\ x = k \end{cases}$$

Debido a que: $1 - \dfrac{k^2}{r^2} < 0$, no existe intersección entre las superficies.

**b) <u>Intersección con planos paralelos al plano xz</u> (y=k)**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{k^2}{r^2} = 1 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} = 1 - \dfrac{k^2}{r^2} \\ y = k \end{cases}$$

**<u>Si k = 0</u>**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} = 1 - \dfrac{0}{r^2} \\ y = k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} = 1 \\ y = k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = r^2 \\ y = k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm r \\ y = k = 0 \end{cases}$$

Intersección correspondiente al plano xz
Obtenemos, por lo tanto, sobre el plano coordenado xz dos rectas:
r1: x = r y r2: x = -r

**<u>Si 0 < k < r</u>**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} = 1 - \dfrac{k^2}{r^2} \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \left(1 - \dfrac{k^2}{r^2}\right) r^2 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \left(r^2 - k^2\right) \\ y = k \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{r^2 - k^2} \\ y = k \end{cases}$$

Debido a que: $r^2 - k^2$ > 0

Obtenemos, dos planos x = $+\sqrt{r^2 - k^2}$ y x = -$\sqrt{r^2 - k^2}$ que cortados con el plano y = k dan como intersección dos rectas:

r1: x = $+\sqrt{r^2 - k^2}$ y r2: x = -$\sqrt{r^2 - k^2}$ respectivamente.

**<u>Si lkl = r</u>**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} = 1 - \dfrac{r^2}{r^2} \\ y = |k| = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} = 0 \\ y = |k| = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ y = |k| = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = |k| = r \end{cases}$$

En este caso, obtenemos el plano x = 0 que cortado con los planos y = lkl= r (y = r e y = -r) dan como intersección las rectas y = r e y = -r respectivamente.

**<u>Si lkl > r</u>**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} = 1 - \dfrac{k^2}{r^2} \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} = nro\_negativo \\ y = k \end{cases}$$

Debido a que: $1 - \dfrac{k^2}{r^2}$ < 0, no existe intersección entre las superficies.

**c) <u>Intersección con planos paralelos al plano xy</u> (z=k)**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1 \\ z = k \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro circular centrado en el origen de coordenadas de radio r, cortado con el plano xy

Independientemente del valor de k, obtenemos una circunferencia de radio r sobre el plano coordenado xy. Los radios de las circunferencias obtenidas no varían a medida que aumenta o disminuye el valor de k.