ESTUDIO DEL CILINDRO ELIPTICO

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

1 - Estudio de la Simetría

a) Simetría respecto a los planos coordenados

Simetría respecto al plano xy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Como la ecuación no contiene a la variable *z,* concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano xy.

Simetría respecto al plano xz

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable *y,* concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano xz.

Simetría respecto al plano yz

$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable *x,* concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano yz.

b) Simetría respecto a los ejes coordenados

Simetría respecto al eje x

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable *y* y la ecuación no contiene a la variable z, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al eje x.

Simetría respecto al eje y

$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable *x* y la ecuación no contiene a la variable *z*, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al eje y.

Simetría respecto al eje z

$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables *x* e *y*, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al eje z.

c*) Simetría respecto al origen de coordenadas*

$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al origen de coordenadas.

2- Verificar si la superficie contiene o no el Origen del Sistema de Coordenadas

Reemplazando por el punto P(0,0,0) en la ecuación:

$$\frac{0^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}\neq 1$$

$$0\neq 1$$

Se verifica, por lo tanto que la superficie no contiene al origen de coordenadas.

3- Intersección con los ejes coordenados

a) Intersección con el eje x

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=a^2 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm a \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

O sea que: x = $\pm a$ y = z = 0 $\Rightarrow$ A1 (a, 0, 0) $\wedge$ A2 (-a, 0, 0)

b) Intersección con el eje y

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=b^2 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\pm b \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

O sea que: y = $\pm b$ x = z = 0 $\Rightarrow$ B1 (0, b, 0) $\wedge$ B2 (0, -b, 0)

c) Intersección con el eje z

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\neq 1 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Por lo tanto, no hay intersección con el eje z.

4- Intersección con los planos coordenados

a) *Intersección con el plano coordenado xy (z=0)*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro elíptico centrado en el origen de coordenadas, cortado con el plano xy
Elipse sobre el plano coordenado xy

b) *Intersección con el plano coordenado xz (y=0)*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = a^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm a \\ y = 0 \end{cases}$$

Obtenemos dos planos: x = a y x = -a que cortados con el plano y = 0 dan como intersección dos rectas: r1: x = a y r2: x = -a sobre el plano coordenado xz.

c) *Intersección con el plano coordenado yz (x=0)*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = b^2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm b \\ x = 0 \end{cases}$$

Obtenemos dos planos: y = b y y = -b que cortados con el plano x = 0 dan como intersección dos rectas: r1: y = b y r2: y = -b sobre el plano coordenado xz.

5. Intersección con planos paralelos a los planos coordenados

a) *Intersección con planos paralelos al plano yz (x=k)*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ x=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ x=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{k^2}{a^2} \\ x=k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y^2=\left(1-\dfrac{k^2}{a^2}\right)b^2 \\ x=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=\left(b^2-\dfrac{b^2k^2}{a^2}\right) \\ x=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\pm\sqrt{b^2-\dfrac{b^2k^2}{a^2}} \\ x=k \end{cases}$$

Si k = 0

$$\begin{cases} y=\pm\sqrt{b^2-\dfrac{b^2k^2}{a^2}} \\ x=k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\pm\sqrt{b^2} \\ x=k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\pm b \\ x=k=0 \end{cases}$$

Intersección correspondiente al plano yz
Obtenemos, sobre el plano coordenado yz dos rectas:
r1: y = b y r2: y = -b

Si 0 < lkl < a

$$\begin{cases} y=\pm\sqrt{b^2-\dfrac{b^2k^2}{a^2}} \\ x=k \end{cases}$$

$$b^2-\frac{b^2k^2}{a^2} > 0$$

$$-\frac{b^2k^2}{a^2} > -\, b^2$$

$$-b^2k^2 > -\, b^2\, a^2$$

$$-k^2 > -a^2$$

$$k^2 < a^2$$

Debido a que $b^2 - \frac{b^2k^2}{a^2}$ > 0 cuando $k^2 <$ a^2

Obtenemos dos planos $y \ = + \sqrt{b^2 - \frac{b^2k^2}{a^2}}$ e $y \ = - \sqrt{b^2 - \frac{b^2k^2}{a^2}}$ que cortados con el plano x = k dan como intersección dos rectas:

r1: x = + $\sqrt{b^2 - \frac{b^2k^2}{a^2}}$ y r2: x = - $\sqrt{b^2 - \frac{b^2k^2}{a^2}}$ respectivamente.

Si lkl = a

$$\begin{cases} y \ = \pm\sqrt{b^2 - \frac{b^2k^2}{a^2}} \\ x = |k| = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \ = \pm\sqrt{b^2 - \frac{b^2a^2}{a^2}} \\ x = |k| = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \ = \pm\sqrt{b^2 - b^2} \\ x = |k| = a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y \ = 0 \\ x = |k| = a \end{cases}$$

En este caso, obtenemos el plano y= 0 que cortado con los planos x = lkl= a (x = a y x = -a) dan como intersección las rectas x = a y x = -a respectivamente.

Si lkl > a

$$\begin{cases} y \ = \pm\sqrt{b^2 - \frac{b^2k^2}{a^2}} \\ x = k \end{cases}$$

$$b^2 - \frac{b^2k^2}{a^2} < 0$$

$$-\frac{b^2k^2}{a^2} < - b^2$$

$$-b^2k^2 < - b^2 a^2$$

$$-k^2 < -a^2$$

$$k^2 > a^2$$

Debido que $b^2 - \frac{b^2k^2}{a^2}$ < 0, cuando $k^2 > a^2$
No existe intersección entre las superficies, en este caso.

b) <u>Intersección con planos paralelos al plano xz</u> (y=k)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = \left(1 - \frac{k^2}{b^2}\right) a^2 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \left(a^2 - \frac{a^2k^2}{b^2}\right) \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{a^2 - \frac{a^2k^2}{b^2}} \\ y = k \end{cases}$$

<u>Si k = 0</u>

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{a^2 - \frac{a^2k^2}{b^2}} \\ y = k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{a^2} \\ y = k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm a \\ y = k = 0 \end{cases}$$

Intersección correspondiente al plano yz
Obtenemos, sobre el plano coordenado yz dos rectas:
r1: x = a y r2: x = -a

<u>Si 0 < lkl < b</u>

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{a^2 - \frac{a^2k^2}{b^2}} \\ y = k \end{cases}$$

$a^2 - \frac{a^2k^2}{b^2}$ > 0

$-\frac{a^2k^2}{b^2}$ > - a^2

$$-a^2k^2 > -a^2b^2$$

$$-k^2 > -b^2$$

$$k^2 < b^2$$

Debido a que $a^2 - \frac{a^2k^2}{b^2} > 0$, cuando $k^2 < b^2$

Obtenemos dos planos $x = +\sqrt{a^2 - \frac{a^2k^2}{b^2}}$ y $x = -\sqrt{a^2 - \frac{a^2k^2}{b^2}}$ que cortados con el plano y = k dan como intersección dos rectas:

r1: $x = +\sqrt{a^2 - \frac{a^2k^2}{b^2}}$ y r2: $x = -\sqrt{a^2 - \frac{a^2k^2}{b^2}}$ respectivamente.

<u>Si lkl = b</u>

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{a^2 - \frac{a^2k^2}{b^2}} \\ y = |k| = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{a^2 - \frac{a^2b^2}{b^2}} \\ y = |k| = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{a^2 - a^2} \\ y = |k| = b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{0} \\ y = |k| = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = |k| = b \end{cases}$$

En este caso, obtenemos el plano x = 0 que cortado con los planos y = lkl= b (y = b e y = -b) dan como intersección las rectas y = b e y = -b respectivamente.

<u>Si lkl > b</u>

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{a^2 - \frac{a^2k^2}{b^2}} \\ y = k \end{cases}$$

$$a^2 - \frac{a^2k^2}{b^2} < 0$$

$$-\frac{a^2k^2}{b^2} < -a^2$$

$$-a^2k^2 < - a^2\ b^2$$

$$-k^2 < -b^2$$

$$k^2 > b^2$$

Debido que $a^2 - \frac{a^2k^2}{b^2}$ < 0, cuando $k^2 > b^2$

No existe intersección entre las superficies, en este caso.

c) <u>Intersección con planos paralelos al plano xy</u> (z=k)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = k \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro elíptico centrado en el origen de coordenadas, cortado con el plano xy

Independientemente del valor de k, obtenemos una elipse sobre el plano coordenado xy. Los semiejes de las elipses obtenidas no varían a medida que aumenta o disminuye el valor de k.