ESTUDIO DEL CILINDRO HIPERBÓLICO

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

1 - Estudio de la Simetría

a) Simetría respecto a los planos coordenados

Simetría respecto al plano xy

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como la ecuación de la superficie no contiene a la variable z, concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano xy.

Simetría respecto al plano xz

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(-y)^2}{b^2} = 1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable y, concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano xz.

Simetría respecto al plano yz

$$\frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable x, concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano yz.

b) Simetría respecto a los ejes coordenados

Simetría respecto al eje x

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(-y)^2}{b^2} = 1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable y y la ecuación no contiene a la variable z, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al eje x.

Simetría respecto al eje y

$$\frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable x y la ecuación no contiene a la variable z, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al eje y.

Simetría respecto al eje z

$$\frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{(-y)^2}{b^2} = 1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables x e y, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al eje z.

c) Simetría respecto al origen de coordenadas

$$\frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{(-y)^2}{b^2} = 1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables x e y y la ecuación no contiene a la variable z, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al origen de coordenadas.

2- Verificar si la superficie contiene o no el Origen del Sistema de Coordenadas

Reemplazando por el punto P(0,0,0) en la ecuación:

$$\frac{0^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} \neq 1$$

$$0 \neq 1$$

Se verifica, por lo tanto que la superficie no contiene al origen de coordenadas.

3- Intersección con los ejes coordenados

a. Intersección con el eje x

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = a^2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm a \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

O sea que: x = $\pm a$ y = z = 0 $\Rightarrow$ A1 (a, 0, 0) $\wedge$ A2 (-a, 0, 0)

b. Intersección con el eje y

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y^2 = b^2 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = \pm\sqrt{-b^2} \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, no existe intersección real.

c. Intersección con el eje z

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 - 0 = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \neq 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, no existe intersección con el eje z.

4- Intersección con los planos coordenados

a) Intersección con el plano coordenado xy (z=0)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro hiperbólico de eje x centrado en el origen de coordenadas, cortado con el plano xy
Hipérbola de eje x sobre el plano coordenado xy

b) Intersección con el plano coordenado xz (y=0)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = a^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm a \\ y = 0 \end{cases}$$

Obtenemos un par de planos: x = a y x = -a, cortados con el plano coordenado xz.
Par de rectas: x = a y x = -a sobre el plano coordenado xz.

c) Intersección con el plano coordenado yz (x=0)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y^2 = b^2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = \pm\sqrt{-b^2} \\ x = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, no existe intersección real.

5- Intersección con planos paralelos a los planos coordenados

a) Intersección con planos paralelos al plano yz (x=k)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{a^2} - 1 \\ x = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = \dfrac{k^2 b^2}{a^2} - b^2 \\ x = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{\dfrac{k^2 b^2}{a^2} - b^2} \\ x = k \end{cases}$$

Si k = 0

$$\begin{cases} y = \pm\sqrt{\dfrac{k^2 b^2}{a^2} - b^2} \\ x = k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{-b^2} \\ x = k = 0 \end{cases}$$

Intersección correspondiente al plano yz
No existe intersección real.

Si 0 < lkl < a

$$\begin{cases} y = \pm\sqrt{\dfrac{k^2 b^2}{a^2} - b^2} \\ x = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{nro\_negativo} \\ x = k \end{cases}$$

$$\frac{k^2 b^2}{a^2} - b^2 < 0$$

$$\frac{k^2 b^2}{a^2} < b^2$$

$$k^2 b^2 < b^2 a^2$$

$$k^2 < a^2$$

$$|k| < |a|$$

Debido a que: $\frac{k^2b^2}{a^2} - b^2$ < 0, cuando $|k|$ < $|a|$, no existe intersección real.

Si lkl = a

$$\begin{cases} y = \pm\sqrt{\frac{k^2b^2}{a^2} - b^2} \\ x = |k| = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2} - b^2} \\ x = |k| = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{b^2 - b^2} \\ x = |k| = a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = |k| = a \end{cases}$$

En este caso, obtenemos el plano y = 0 que cortado con los planos x = lkl = a (x = a y x = -a) dan como intersección las rectas x = a y x = -a respectivamente.

Si lkl > a

$$\begin{cases} y = \pm\sqrt{\frac{k^2b^2}{a^2} - b^2} \\ x = k \end{cases}$$

$$\frac{k^2b^2}{a^2} - b^2 > 0$$

$$\frac{k^2b^2}{a^2} > b^2$$

$$k^2b^2 > b^2a^2$$

$$k^2 > a^2$$

$$|k| > |a|$$

Debido a que: $\frac{k^2b^2}{a^2} - b^2$ > 0, cuando $|k|$ > $|a|$

Obtenemos dos planos: $y = +\sqrt{\frac{k^2b^2}{a^2} - b^2}$ e $y = -\sqrt{\frac{k^2b^2}{a^2} - b^2}$ cortados con un plano paralelo al plano coordenado yz.

Es decir, par de rectas: $y = +\sqrt{\frac{k^2b^2}{a^2} - b^2}$ e $y = -\sqrt{\frac{k^2b^2}{a^2} - b^2}$ sobre el plano x = k

b) <u>Intersección con planos paralelos al plano xz</u> (y=k)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = 1 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = a^2 + \frac{k^2a^2}{b^2} \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{a^2 + \frac{k^2a^2}{b^2}} \\ y = k \end{cases}$$

Obtenemos, un par de planos $x = +\sqrt{a^2 + \frac{k^2a^2}{b^2}}$ y $x = -\sqrt{a^2 + \frac{k^2a^2}{b^2}}$ cortados con un plano paralelo al plano coordenado xz

Para cada valor de k, se obtiene como intersección un par de rectas:
r1: $x = +\sqrt{a^2 + \frac{k^2a^2}{b^2}}$ y r2: $x = -\sqrt{a^2 + \frac{k^2a^2}{b^2}}$

c) <u>Intersección con planos paralelos al plano xy</u> (z=k)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = k \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro hiperbólico centrado en el origen de coordenadas de eje x, cortado con un plano paralelo al plano coordenado xy
Para cada valor de k se obtiene como intersección una hipérbola. Los semiejes de las hipérbolas obtenidas permanecen constantes para todos los valores de k.