ESTUDIO DEL CONO ELIPTICO

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0}$$

Nota: Lo dibujos correspondientes a las intersecciones de este estudio tienen el mismo aspecto al estudio del cono circular. Sin embargo la intersección con planos paralelos al plano “xy” son en este caso elipses en lugar de circunferencias.

1 - Estudio de la Simetría

a) Simetría respecto a los planos coordenados

Simetría respecto al plano xy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(-z)^2}{c^2}=0$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable z, concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano xy.

Simetría respecto al plano xz

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable y, concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano xz.

Simetría respecto al plano yz

$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable x, concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano yz.

b) Simetría respecto a los ejes coordenados

Simetría respecto al eje x

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}-\frac{(-z)^2}{c^2}=0$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables y y z, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al eje x.

Simetría respecto al eje y

$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(-z)^2}{c^2}=0$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables x y z, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al eje y.

Simetría respecto al eje z

$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables x e y, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al eje z.

c) Simetría respecto al origen de coordenadas

$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}-\frac{(-z)^2}{c^2}=0$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las 3 variables, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al origen de coordenadas.

2- Verificar si la superficie contiene o no el Origen del Sistema de Coordenadas

Reemplazando por el punto P(0,0,0) en la ecuación:

$$\frac{0^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}-\frac{0^2}{c^2}=0$$

$$0=0$$

Se deduce que la superficie contiene al origen de coordenadas.

3- Intersección con los ejes coordenados

a. Intersección con el eje x

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

O sea que: x = y = z = 0 $\Rightarrow$ P (0, 0, 0)

b. Intersección con el eje y

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

O sea que: x = y = z = 0 $\Rightarrow$ P (0, 0, 0)

c. Intersección con el eje z

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{z^2}{c^2}=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

O sea que: x = y = z = 0 $\Rightarrow$ P (0, 0, 0)

4- <u>Intersección con los planos coordenados</u>

a) <u>Intersección con el plano coordenado “xy”</u> (z=0)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0 \\ z=0 \end{cases}$$

En este caso, la única posibilidad de que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ es que los valores de x y los valores de y sean iguales a $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$. Por lo tanto obtenemos una recta coincidente con el eje z, que cortada con el plano “xy” (z=0) da como intersección el punto de coordenadas P (0, 0, 0)

b) <u>Intersección con el plano coordenado “xz”</u> (y=0)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{z^2}{c^2} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{a^2}{c^2}z^2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{a^2}{c^2}z^2} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\dfrac{a}{c}z \\ y=0 \end{cases}$$

Obtenemos los planos x = $\frac{a}{c}z$ y x = -$\frac{a}{c}z$, que cortados con el plano “xz” (y = 0) dan como intersección las rectas: r_1 $\begin{cases} x=\frac{a}{c}z \\ y=0 \end{cases}$ y r_2: $\begin{cases} x=-\frac{a}{c}z \\ y=0 \end{cases}$, respectivamente.

c) <u>Intersección con el plano coordenado “yz”</u> (x=0)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2} \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=\dfrac{b^2}{c^2}z^2 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=\pm\sqrt{\dfrac{b^2}{c^2}z^2} \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\pm\dfrac{b}{c}z \\ x=0 \end{cases}$$

Obtenemos los planos y = $\frac{b}{c}z$ e y = -$\frac{b}{c}z$, que cortados con el plano "yz" (x = 0) dan como intersección las rectas: r_1 $\begin{cases} y = \frac{b}{c}z \\ x = 0 \end{cases}$ y r_2: $\begin{cases} y = -\frac{b}{c}z \\ x = 0 \end{cases}$, respectivamente.

Actividad: Interpretar geométricamente

5- Intersección con planos paralelos a los planos coordenados

Actividad: Interpretar geométricamente.

a) Intersección con planos paralelos al plano "yz" (x=k)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{k^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2\left(-\frac{k^2}{a^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(-\frac{k^2}{a^2}\right)} = 1 \\ x = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{y^2}{b^2\frac{k^2}{a^2}} + \frac{z^2}{c^2\frac{k^2}{a^2}} = 1 \\ x = k \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro hiperbólico de eje z centrado en el origen de coordenadas, cortado con un plano paralelo al plano coordenado "yz".
Para cada valor de k, se obtiene como intersección una hipérbola. Los semiejes de las hipérbolas obtenidas aumentan a medida que |k| aumenta.

b) Intersección con planos paralelos al plano "xz" (y=k)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2\left(-\frac{k^2}{b^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(-\frac{k^2}{b^2}\right)} = 1 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{x^2}{a^2\frac{k^2}{b^2}} + \frac{z^2}{c^2\frac{k^2}{b^2}} = 1 \\ y = k \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro hiperbólico de eje z centrado en el origen de coordenadas, cortado con un plano paralelo al plano coordenado “xz”.
Para cada valor de k, se obtiene como intersección una hipérbola. Los semiejes de las hipérbolas obtenidas aumentan a medida que lkl aumenta

c) **<u>Intersección con planos paralelos al plano “xy”</u> (z=k)**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0 \\ z=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{k^2}{c^2}=0 \\ z=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{k^2}{c^2} \\ z=k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\,\dfrac{k^2}{c^2}}+\dfrac{y^2}{b^2\,\dfrac{k^2}{c^2}}=1 \\ z=k \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro elíptico centrado en el origen de coordenadas, cortado con un plano paralelo al plano coordenado “xy”.
Para cada valor de k, se obtiene como intersección una elipse. Los semiejes de las elipses obtenidas aumentan a medida que lkl aumenta.

<u>Actividad:</u> Se deja para desarrollo por parte del lector, el estudio de los conos de directriz parabólica.