ESTUDIO DEL ELIPSOIDE

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

1 - Estudio de la Simetría

a) Simetría respecto a los planos coordenados

Simetría respecto al plano xy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(-z)^2}{c^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable z, concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano xy.

Simetría respecto al plano xz

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable y, concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano xz.

Simetría respecto al plano yz

$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable x, concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano yz.

b) Simetría respecto a los ejes coordenados

Simetría respecto al eje x

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}+\frac{(-z)^2}{c^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables y y z, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al eje x.

Simetría respecto al eje y

$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(-z)^2}{c^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables x y z, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al eje y.

Simetría respecto al eje z

$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables x e y, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al eje z.

c) Simetría respecto al origen de coordenadas

$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}+\frac{(-z)^2}{c^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las 3 variables, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al origen de coordenadas.

2- Verificar si la superficie contiene o no el origen del sistema de coordenadas

Reemplazando por el punto P(0,0,0) en la ecuación:

$$\frac{0^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}+\frac{0^2}{c^2}\neq 1$$

$$0\neq 1$$

Se deduce que la superficie no contiene al origen de coordenadas.

3- <u>Intersección con los ejes coordenados</u>

a) <u>Intersección con el eje x</u>

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=a^2 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ =\pm a \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

O sea que: x = $\pm a$; y = z = 0 determina los puntos A_1 (a, 0, 0) $\wedge$ A_2 (-a, 0, 0)

b) <u>Intersección con el eje y</u>

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y^2}{b^2}=1 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=b^2 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\ =\pm b \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

O sea que:
y = $\pm b$ x = z = 0 $\Rightarrow$ B_1 (0, b, 0) $\wedge$ B_2 (0, -b, 0)

c) <u>Intersección con el eje z</u>

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2=c^2 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z\ =\pm c \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

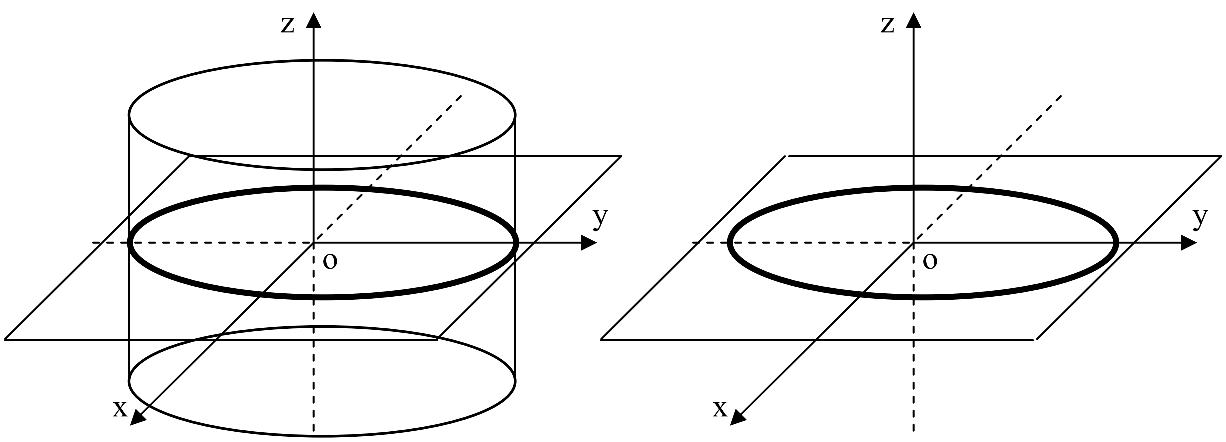
O sea que: z = $\pm c$ x = y = 0 $\Rightarrow$ C_1 (0, 0, c) $\wedge$ C_2 (0, 0, -c)

4- Intersección con los planos coordenados

a) Intersección con el plano coordenado "xy" (z=0)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

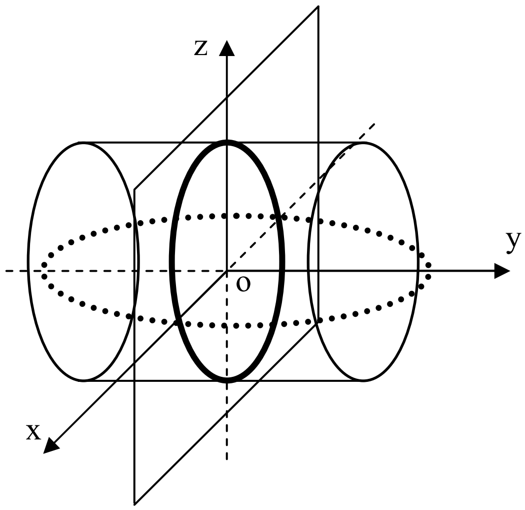
Obtenemos un cilindro elíptico centrado en el origen de coordenadas, cortado con el plano "xy" determina una elipse sobre el plano coordenado "xy".

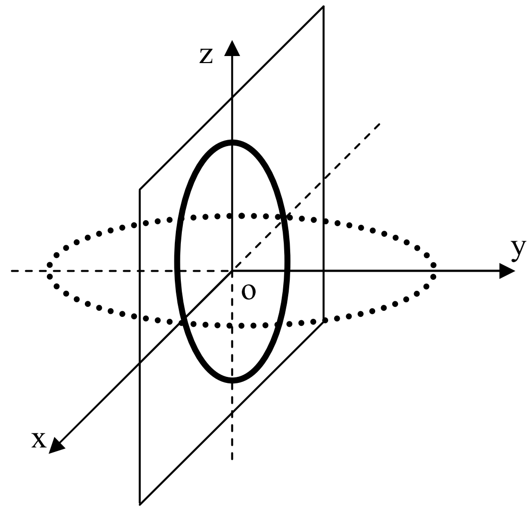


b) Intersección con el plano coordenado "xz" (y=0)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro elíptico centrado en el origen de coordenadas, cortado con el plano "xz" determina una elipse sobre el plano coordenado "xz".

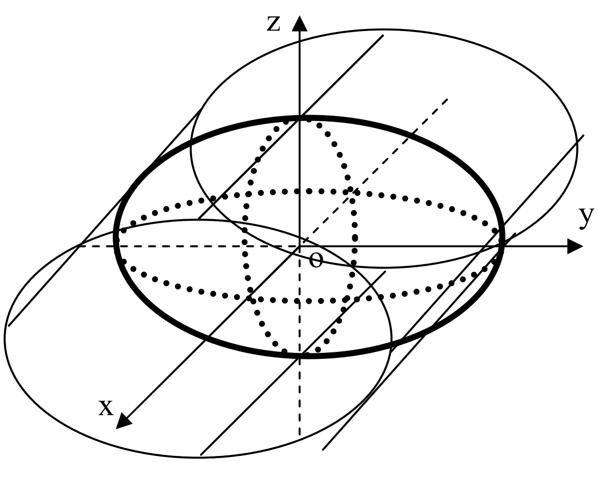


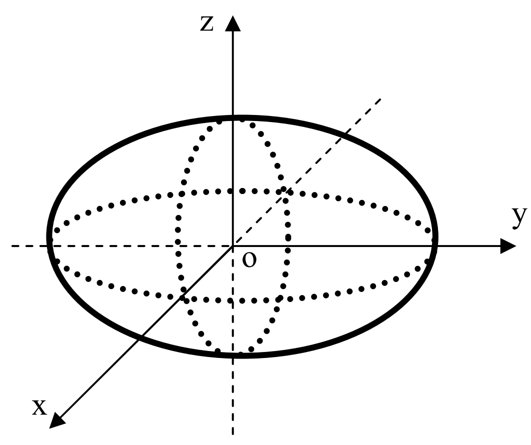


c) <u>Intersección con el plano coordenado “yz”</u> (x=0)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro elíptico centrado en el origen de coordenadas, cortado con el plano ”yz” determinando una elipse sobre el plano coordenado “yz”.





5. Intersección con planos paralelos a los planos coordenados

a) Intersección con planos paralelos al plano "yz" (x=k)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{a^2} \\ x=k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{k^2}{a^2}\right)}+\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{k^2}{a^2}\right)}=1 \\ x=k \end{cases}$$

Si k = 0

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{0^2}{a^2}\right)}+\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{0^2}{a^2}\right)}=1 \\ x=k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=k=0 \end{cases}$$

Intersección correspondiente al plano "yz"
Obtenemos un cilindro elíptico centrado en el origen de coordenadas, cortado con el plano "yz" determinando una elipse sobre el plano coordenado "yz".

Si 0 < lkl < a

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{k^2}{a^2}\right)}+\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{k^2}{a^2}\right)}=1 \\ x=k \end{cases}$$

Debido a que: $1-\dfrac{k^2}{a^2} > 0$

Obtenemos un cilindro elíptico cortado con un plano paralelo al plano coordenado "yz".

Para cada valor de k, independientemente de su signo, se obtiene como intersección una elipse. Los semiejes de las elipses obtenidas disminuyen a medida que lkl aumenta.

<u>Si lkl = a</u>

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{a^2}{a^2} \\ x=|k|=a \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0 \\ x=|k|=a \end{cases}$$

En este caso, la única posibilidad en que $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ es que los valores de y y los valores de z sean iguales a 0, es decir $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$. Por lo tanto obtenemos una recta coincidente con el eje x, que cortada con los planos $x=\pm a$ (x=a y x=-a) dan como intersección dos puntos de coordenadas $P_1(a,0,0)$ y $P_2(-a,0,0)$, respectivamente.

<u>Si lkl > a</u>

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{a^2} \\ x=k \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=nro\_negativo \\ x=k \end{cases}$$

Debido a que: $1-\frac{k^2}{a^2}$ < 0

Obtenemos un cilindro elíptico de semiejes imaginarios cortado con un plano paralelo al plano coordenado “yz”.
Por lo tanto, no existe intersección entre las superficies.

b) <u>Intersección con planos paralelos al plano “xz”</u> (y=k)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=k \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=k \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{b^2} \\ y=k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{k^2}{b^2}\right)}+\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{k^2}{b^2}\right)}=1 \\ y=k \end{cases}$$

<u>Si k = 0</u>

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{0^2}{b^2}\right)}+\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{0^2}{b^2}\right)}=1 \\ y=k=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=k=0 \end{cases}$$

Intersección correspondiente al plano “xz”.
Obtenemos un cilindro elíptico centrado en el origen de coordenadas, cortado con el plano “xz” determina una elipse sobre el plano coordenado “xz”**.**

<u>Si 0 < lkl < b</u>

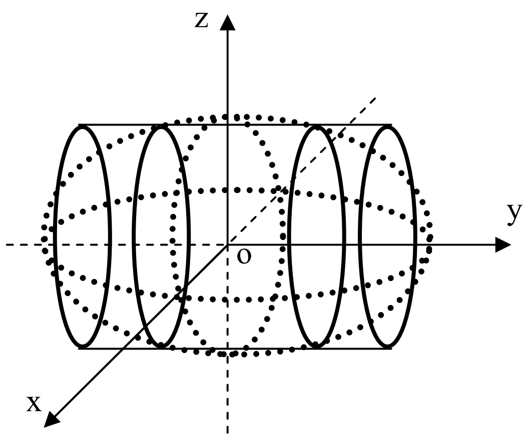
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{k^2}{b^2}\right)}+\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{k^2}{b^2}\right)}=1 \\ y=k \end{cases}$$

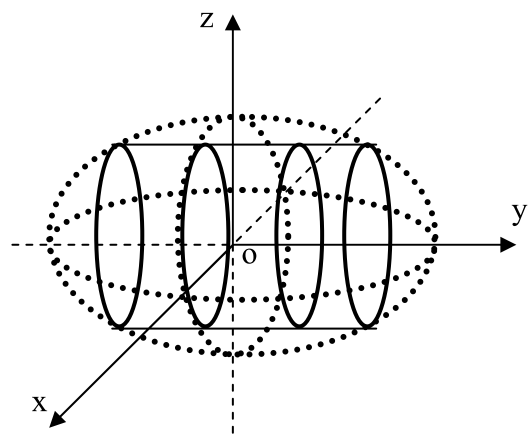
Debido a que: $1-\dfrac{k^2}{b^2}$ > 0
Obtenemos un cilindro elíptico cortado con un plano paralelo al plano coordenado “xz”.
Para cada valor de k, independientemente de su signo, se obtiene como intersección una elipse. Los semiejes de las elipses obtenidas disminuyen a medida que lkl aumenta.

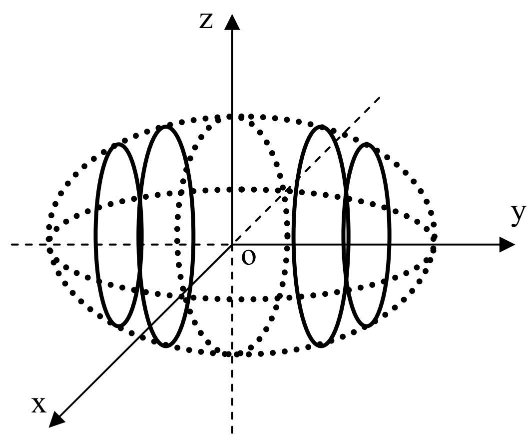
<u>Si lkl = b</u>

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{b^2}{b^2} \\ y=|k|=b \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0 \\ y=|k|=b \end{cases}$$

En este caso, la única posibilidad en que $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$ es que los valores de x y los valores de z sean iguales a 0, es decir $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$. Por lo tanto obtenemos una recta coincidente con el eje y, que cortada con los planos $y=\pm b$ (y= b $\wedge$ y= -b) dan como intersección dos puntos de coordenadas $P_1(0,b,0)$ y $P_2(0,-b,0)$ respectivamente.







Si lkl > b

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = nro\_negativo \\ y = k \end{cases}$$

Debido a que: $1 - \frac{k^2}{b^2} < 0$

Obtenemos un cilindro elíptico de semiejes imaginarios cortado con un plano paralelo al plano coordenado “xz”.
Por lo tanto, no existe intersección entre las superficies.

c) Intersección con planos paralelos al plano xy (z=k)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ z=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{k^2}{c^2}=1 \\ z=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{k^2}{c^2} \\ z=k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{k^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{k^2}{c^2}\right)}=1 \\ z=k \end{cases}$$

<u>Si k = 0</u>

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{0^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{0^2}{c^2}\right)}=1 \\ z=k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=k=0 \end{cases}$$

Intersección correspondiente al plano xy
Obtenemos un cilindro elíptico centrado en el origen de coordenadas, cortado con el plano “xy” determina una elipse sobre el plano coordenado “xy”.

<u>Si 0 < lkl < c</u>

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{k^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{k^2}{c^2}\right)}=1 \\ z=k \end{cases}$$

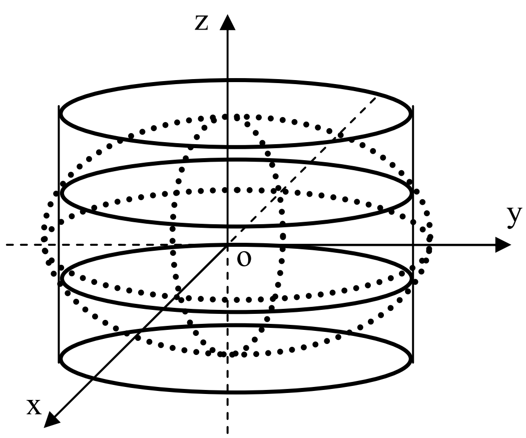
Debido a que: $1-\dfrac{k^2}{c^2} > 0$

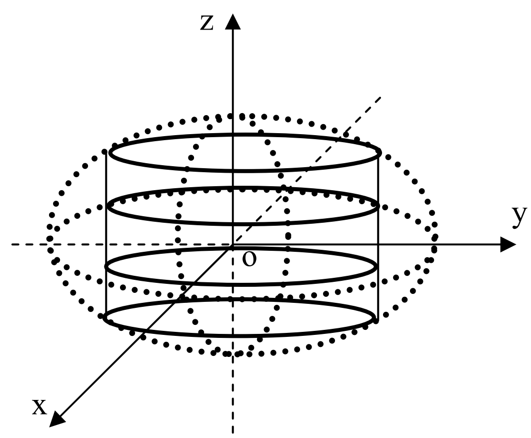
Obtenemos un cilindro elíptico cortado con un plano paralelo al plano coordenado xy
Para cada valor de k, independientemente de su signo, se obtiene como intersección una elipse. Los semiejes de las elipses obtenidas disminuyen a medida que lkl aumenta.

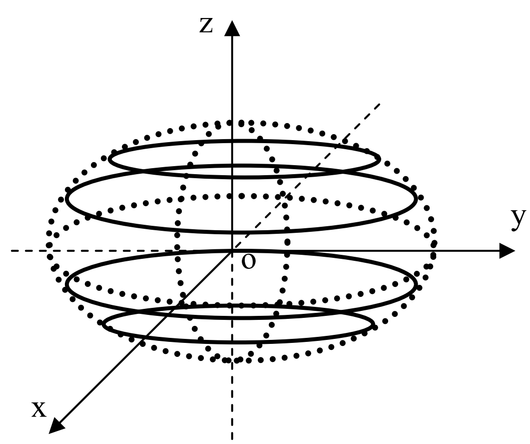
<u>Si lkl = c</u>

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{c^2}{c^2} \\ z=|k|=c \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0 \\ z=|k|=c \end{cases}$$

En este caso, la única posibilidad en que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ es que los valores de x y los valores de y sean iguales a 0, es decir $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$. Por lo tanto obtenemos una recta coincidente con el eje z, que cortada con los plano $z=\pm c$ (z=c y z=-c) dan como intersección dos puntos de coordenadas $P_1(0,0,c)$ y $P_2(0,0,-c)$, respectivamente.







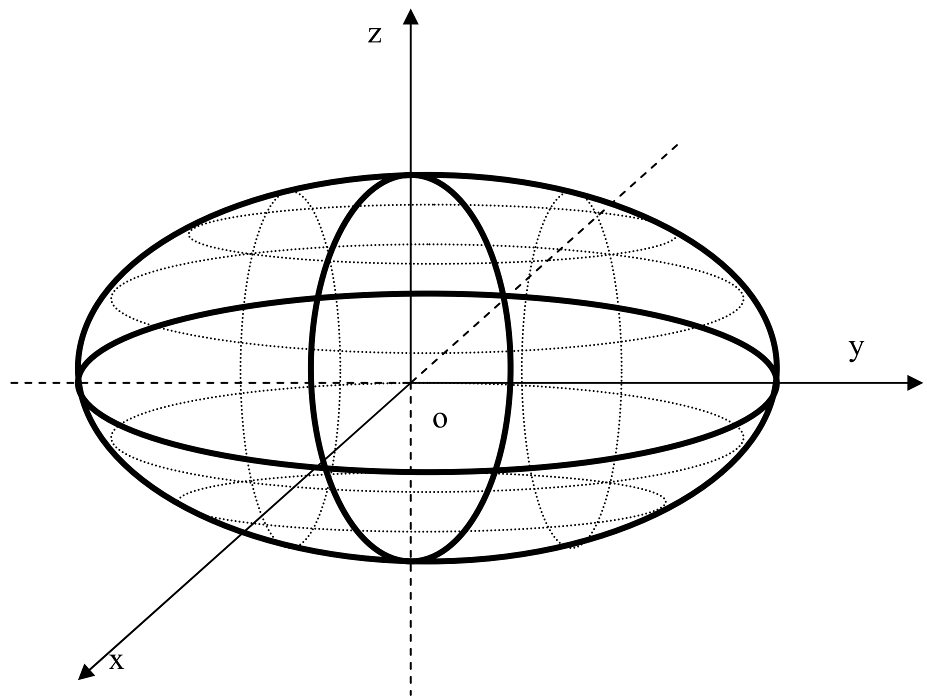
<u>Si lkl > c</u>

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{k^2}{c^2} \\ z=k \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=nro\_negativo \\ z=k \end{cases}$$

Debido a que: $1-\frac{k^2}{c^2} < 0$

Obtenemos un cilindro elíptico de semiejes imaginarios cortado con un plano paralelo al plano coordenado “xy”.

Por lo tanto, no existe intersección entre las superficies.



<u>Nota:</u> El **elipsoide** también puede estudiarse como una **superficie de revolución generada por una elipse que gira alrededor de uno de sus ejes**.