ESTUDIO DEL HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

1 - Estudio de la Simetría

a) Simetría respecto a los planos coordenados

Simetría respecto al plano xy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(-z)^2}{c^2}=1$$

la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable z, concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano xy.

Simetría respecto al plano xz

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable y; concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano xz.

Simetría respecto al plano yz

$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable x; concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano yz.

b) Simetría respecto a los ejes coordenados

Simetría respecto al eje x

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}-\frac{(-z)^2}{c^2}=1$$

la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables *y* y *z*; concluimos que la superficie es simétrica respecto al eje x.

<u>Simetría respecto al eje y</u>

$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(-z)^2}{c^2}=1$$

la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables x y z; concluimos que la superficie es simétrica respecto al eje y.

<u>Simetría respecto al eje z</u>

$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables x e y; concluimos que la superficie es simétrica respecto al eje z.

c) Simetría respecto al origen de coordenadas

$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}-\frac{(-z)^2}{c^2}=1$$

la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las tres variables; concluimos que la superficie es simétrica respecto al origen;.

2- Verificar si la superficie contiene o no el Origen del Sistema de Coordenadas

Reemplazando por el punto P(0,0,0) en la ecuación:

$$\frac{0^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}-\frac{0^2}{c^2}\neq 1 \quad ; \quad 0\neq 1$$

se deduce que la superficie no contiene al origen de coordenadas.

3- ntersección con los ejes coordenados

a) Intersección con el eje x

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\\ z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}=1\\ y=0\\ z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2=a^2\\ y=0\\ z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\pm a\\ y=0\\ z=0\end{cases}$$

O sea que: x = $\pm a$ y = z = 0 $\Rightarrow$ A_1 (a, 0, 0) $\wedge$ A_2 (-a, 0, 0)
(son dos puntos sobre el eje x, simétricos con respecto al origen del sistema de referencia)

b) Intersección con el eje y

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=b^2 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\pm b \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

o sea que: y = $\pm b$ x = z = 0 $\Rightarrow$ B_1 (0, b, 0) $\wedge$ B_2 (0, -b, 0)
(*son dos puntos sobre el eje y, simétricos con respecto al origen del sistema de referencia)*

c) Intersección con el eje z

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2=\sqrt{-c^2} \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$ raíz par de nº negativo;

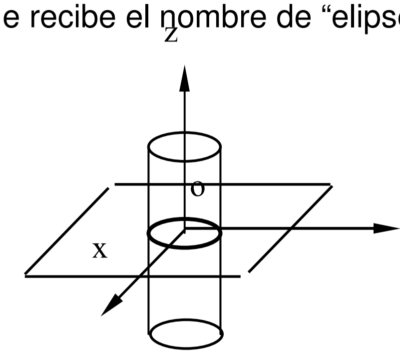
por lo tanto, no existe intersección real.

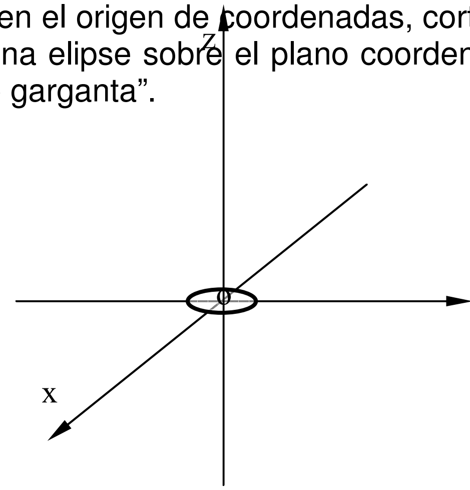
4- Intersección con los planos coordenados

a) Intersección con el plano coordenado "xy" (z=0)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$$

btenemos un cilindro elíptico centrado en el origen de coordenadas, cortado con el plano "xy", La intersección es una elipse sobre el plano coordenado "xy" que recibe el nombre de "elipse de garganta".

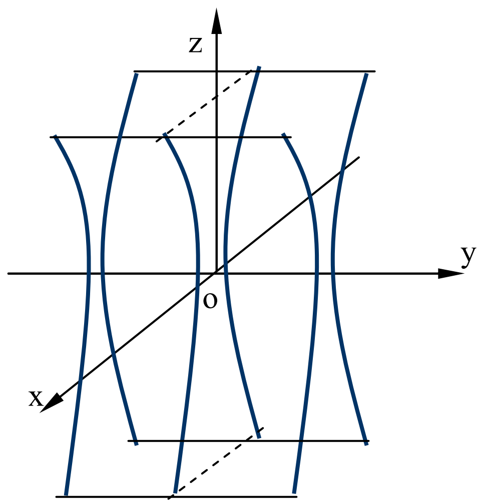


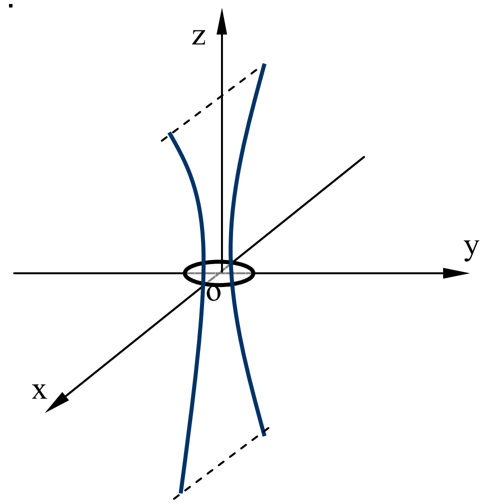


b) <u>Intersección con el plano coordenado "xz"</u> (y = 0)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

obtenemos un cilindro hiperbólico de eje x centrado en el origen de coordenadas, cortado con el plano "xz". La intersección es una hipérbola de eje focal x sobre el plano coordenado "xz".

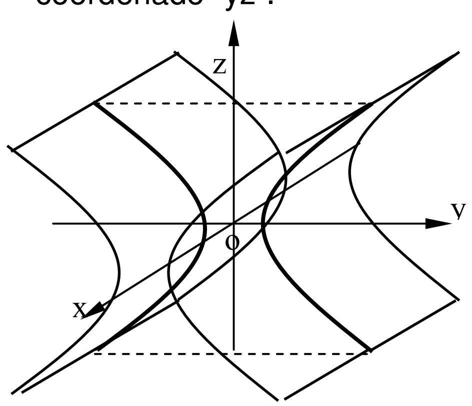




c) <u>Intersección con el plano coordenado "yz"</u> (x = 0)

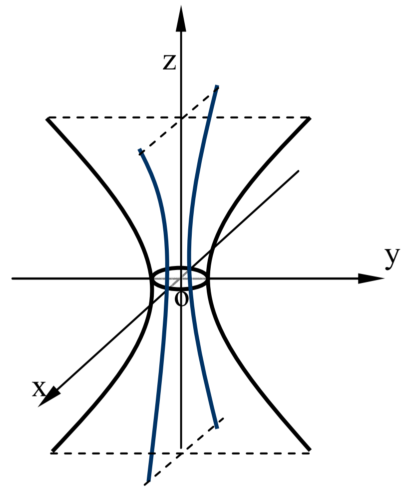
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

obtenemos un cilindro hiperbólico de eje y centrado en el origen de coordenadas, cortado con el plano "yz": hipérbola de eje y sobre el plano coordenado "yz".



← Cilindro hiperbólico cortado por el plano "yz": hipérbola de eje real y

Resultado del estudio hasta esta intersección $\rightarrow$



5- Intersección con planos paralelos a los planos coordenados

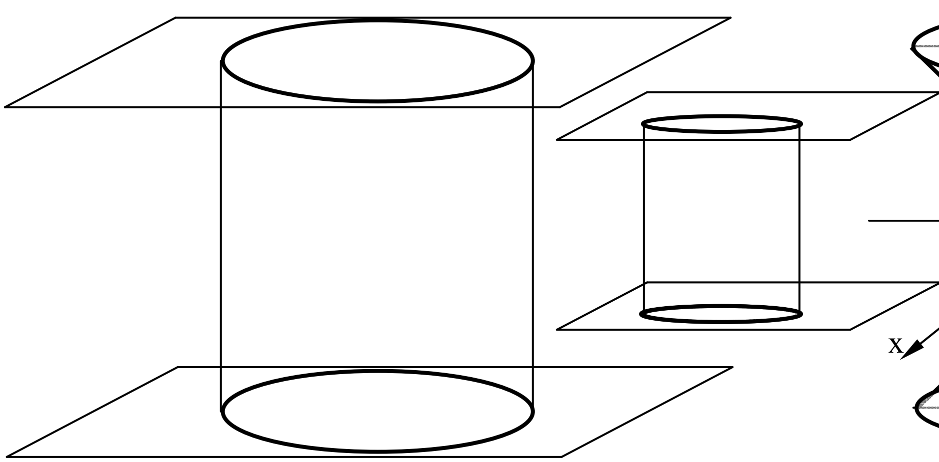
a) Intersección con planos paralelos al plano “xy” (z=k)

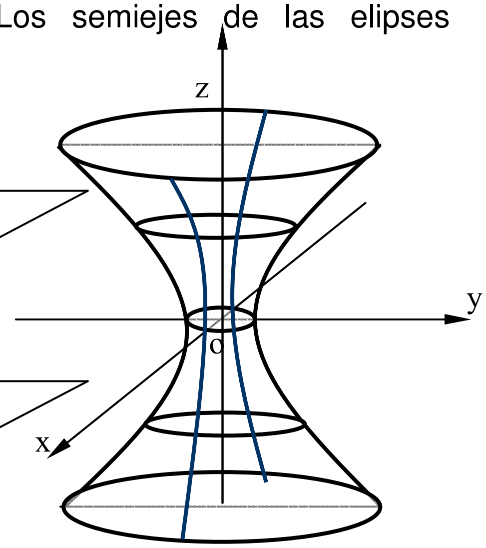
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ z=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{k^2}{c^2}=1 \\ z=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{k^2}{c^2} \\ z=k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{k^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{k^2}{c^2}\right)}=1 \\ z=k \end{cases}$$

obtenemos un cilindro elíptico centrado en el origen de coordenadas, cortado con un plano paralelo al plano “xy”.

Para cada valor de k, independientemente de su signo, se obtiene como intersección una elipse. Los semiejes de las elipses aumentan a medida que lkl aumenta.





b) <u>Intersección con planos paralelos al plano "xz"</u> (y=k)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{b^2} \\ y=k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{k^2}{b^2}\right)}-\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{k^2}{b^2}\right)}=1 \\ y=k \end{cases}$$

<u>Si k = 0</u>

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{0^2}{b^2}\right)}-\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{0^2}{b^2}\right)}=1 \\ y=k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=k=0 \end{cases}$$

(ver figura en el estudio de la intersección con el plano coordenado "xz").

<u>Si 0 < lkl < b</u>

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{k^2}{b^2}\right)}-\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{k^2}{b^2}\right)}=1 \\ y=k \end{cases}$$; debido a que: $\left(1-\dfrac{k^2}{b^2}\right)$ > 0, obtenemos

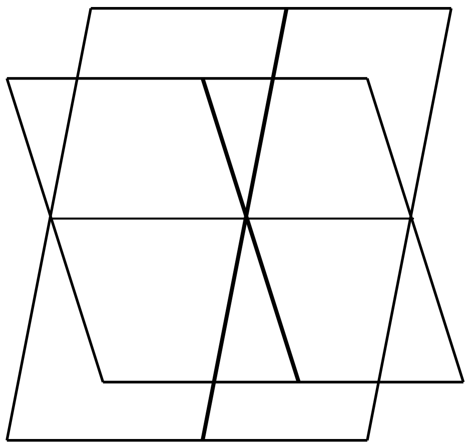
un cilindro hiperbólico de eje paralelo al eje x cortado con un plano paralelo al plano coordenado "xz".

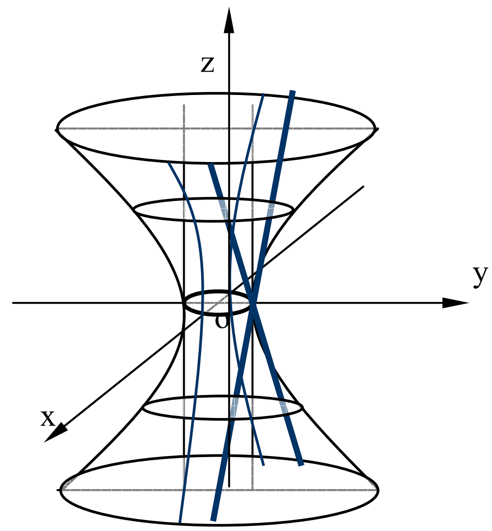
<u>Actividad:</u> Efectuar la interpretación geométrica de esta intersección *(se sugiere un estudio análogo a la intersección con el plano coordenado "xz").*

<u>Si lkl = b</u>

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{b^2}{b^2} \\ y=|k|=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0 \\ y=|k|=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)\bullet\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=0 \\ y=|k|=b \end{cases}$$

obtenemos un par de planos cortado con los planos $y = \pm b$ (y= b y y=-b)
Es decir, par de rectas sobre los planos (y= b y y=-b)





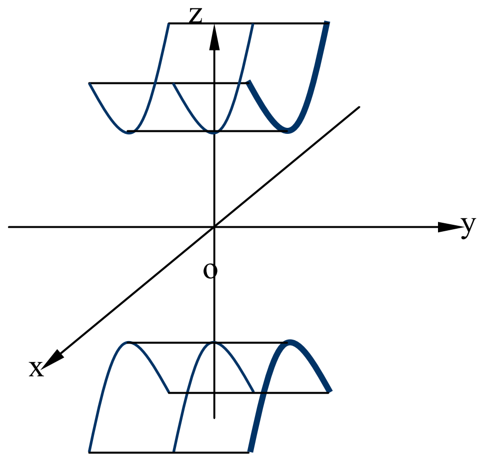
<u>Si lkl > b</u>

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{k^2}{b^2}\right)} - \dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{k^2}{b^2}\right)} = 1 \\ y = k \end{cases} \quad ;$$

debido a que: $\left(1-\dfrac{k^2}{b^2}\right) < 0$

cambia el eje de la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{k^2}{b^2}\right)} - \dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{k^2}{b^2}\right)} = 1$

por lo tanto, obtenemos un cilindro hiperbólico de eje z cortado con un plano paralelo al plano coordenado “yz”.; para cada valor de k, independientemente de su signo, tendremos como intersección una hipérbola de eje z.



c) **<u>Intersección con planos paralelos al plano "yz"</u> (x=k)**
(la gráfica de esta intersección se deja como ejercitación)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{a^2} \\ x=k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{k^2}{a^2}\right)}-\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{k^2}{a^2}\right)}=1 \\ x=k \end{cases}$$

<u>Si k = 0</u>

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{0^2}{a^2}\right)}-\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{0^2}{a^2}\right)}=1 \\ x=k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=k=0 \end{cases}$$

Intersección correspondiente al plano "yz", ya estudiada.

<u>Si 0 < lkl < a</u>

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{k^2}{a^2}\right)} - \dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{k^2}{a^2}\right)} = 1 \\ x = k \end{cases}$$; por lo tanto: $\left(1-\dfrac{k^2}{a^2}\right)$ > 0

obtenemos un cilindro hiperbólico de eje y cortado con un plano paralelo al plano coordenado "yz".

Para cada valor de k, independientemente de su signo, se obtiene como intersección una hipérbola de eje y.

<u>Si lkl = a</u>

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{a^2}{a^2} \\ x = |k| = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = |k| = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{b}\right) \bullet \left(\dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c}\right) = 0 \\ x = |k| = a \end{cases}$$

obtenemos un par de planos cortados con los planos $x = \pm a$ (x= a y x=-a)
Es decir, par de rectas sobre los planos (x= a y x=-a)

<u>Si lkl > a</u>

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{k^2}{a^2}\right)} - \dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{k^2}{a^2}\right)} = 1 \\ x = k \end{cases}$$; debido a que: $\left(1-\dfrac{k^2}{a^2}\right)$ < 0,

cambia el eje de la hipérbola $\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{k^2}{a^2}\right)} - \dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{k^2}{a^2}\right)} = 1$

Por lo tanto, obtenemos un cilindro hiperbólico de eje z cortado con un plano paralelo al plano coordenado "yz".

Para cada valor de k, independientemente de su signo, se obtiene como intersección una hipérbola de eje z. Los semiejes de las hipérbolas obtenidas aumentan a medida que lkl aumenta.

Nota: El hiperboloide de una hoja es una superficie de revolución para el caso particular en que dos de las constantes de la ecuación correspondiente sean iguales; por ejemplo si la ecuación es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$ puede generarse como una hipérbola de ecuaciones $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$; $y=0$ rotando alrededor del eje z.

También puede considerarse como superficie de revolución generada por una recta que se apoya sobre dos directrices circulares paralelas, concéntricas, formando ángulo constante con ellas.

Para el caso general de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\boldsymbol{1}$ el hiperboloide de una hoja puede definirse como lugar geométrico formado por una recta generatriz que se apoya sobre dos directrices elípticas, (situadas en planos paralelos, con sus centros ubicados sobre el eje de la superficie) y forma ángulo constante con ellas.

La discusión realizada del hiperboloide de una hoja ha demostrado que por cada una de las intersecciones de la elipse de garganta con los ejes coordenados pasan dos rectas. Esta aseveraciòn puede complementarse diciendo que, en realidad, cualquiera sea el punto considerado de esta superficie cuádrica, pasan por él dos rectas que íntegramente le pertenecen.

En efecto, si damos a la ecuación del hiperboloide de una hoja el aspecto $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$, como ambos miembros de la igualdad pueden ser considerados como diferencia de cuadrados, podemos escribirlos en la forma: $\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\cdot\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\cdot\left(1-\frac{y}{b}\right)$ que es igual al producto de las dos ecuaciones que siguen: $\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{cases}$, las cuales, consideradas juntas representan una recta (no olvidemos que una recta puede escribirse como la intersección de dos planos) para cada valor de k ; variando el valor de k se conforma un haz de rectas.

Otro haz de rectas se obtiene construyendo el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = k\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{k}\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$$

para distintos valores de k; por todo ello, el hiperboloide de una hoja es una superficie reglada que contiene dos sistemas de generatrices rectas; por cada punto del hiperboloide de una hoja, pasa una recta de cada haz.