ESTUDIO DEL HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

1 - Estudio de la Simetría

a) Simetría respecto a los planos coordenados

Simetría respecto al plano xy

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{(-z)^2}{c^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable *z*, concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano xy.

Simetría respecto al plano xz

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(-y)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable *y*, concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano xz.

Simetría respecto al plano yz

$$\frac{(-x)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable *x*, concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano yz.

b) Simetría respecto a los ejes coordenados

Simetría respecto al eje x

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(-y)^2}{b^2}-\frac{(-z)^2}{c^2}=1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables *y* y *z*, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al eje x.

Simetría respecto al eje y

$$\frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{(-z)^2}{c^2} = 1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables *x* y *z*, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al eje y.

Simetría respecto al eje z

$$\frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{(-y)^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables *x* e *y*, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al eje z.

c) Simetría respecto al origen de coordenadas

$$\frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{(-y)^2}{b^2} - \frac{(-z)^2}{c^2} = 1$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las 3 variables, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al origen de coordenadas.

2- Verificar si la superficie contiene o no el Origen del Sistema de Coordenadas

Reemplazando por el punto P(0,0,0) en la ecuación:

$$\frac{0^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} - \frac{0^2}{c^2} \neq 1$$

$$0 \neq 1$$

Se deduce que la superficie no contiene al origen de coordenadas.

3- Intersección con los ejes coordenados

a. Intersección con el eje x

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=a^2 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm a \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

O sea que:
x = $\pm a$
y = z = 0
$\Rightarrow$ A_1 (a, 0, 0) $\wedge$ A_2 (-a, 0, 0)

b. Intersección con el eje y

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=-b^2 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y=\pm\sqrt{-b^2} \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Por lo tanto, no existe intersección real.

c. Intersección con el eje z

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2=\pm\sqrt{-c^2} \text{ raiz par de nº negativo} \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

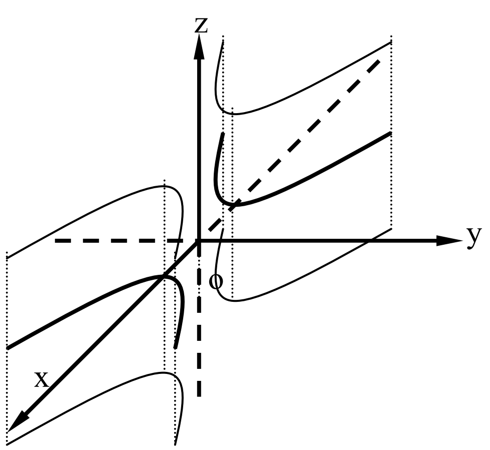
Por lo tanto, no existe intersección real.

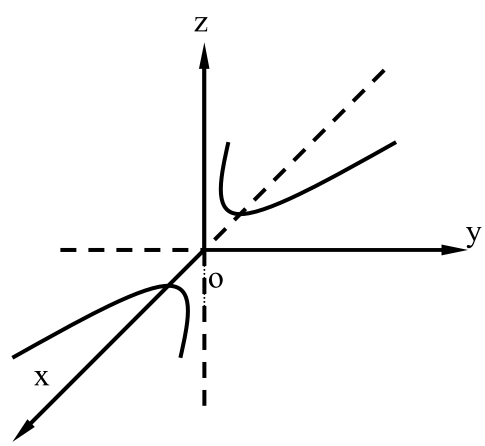
4- Intersección con los planos coordenados

a) Intersección con el plano coordenado "xy" (z=0)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro hiperbólico de eje x centrado en el origen de coordenadas, cortado con el plano "xy" determinando una hipérbola de eje x sobre el plano coordenado "xy".

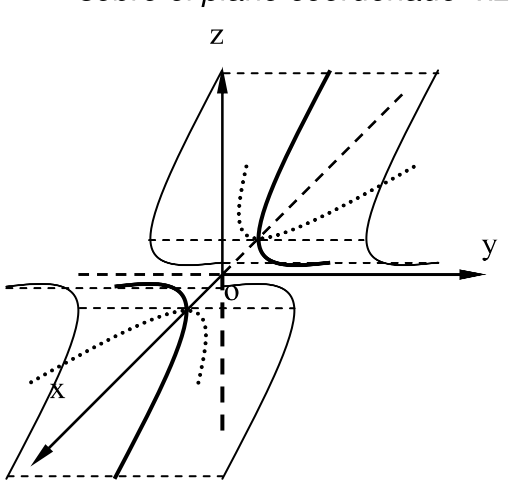


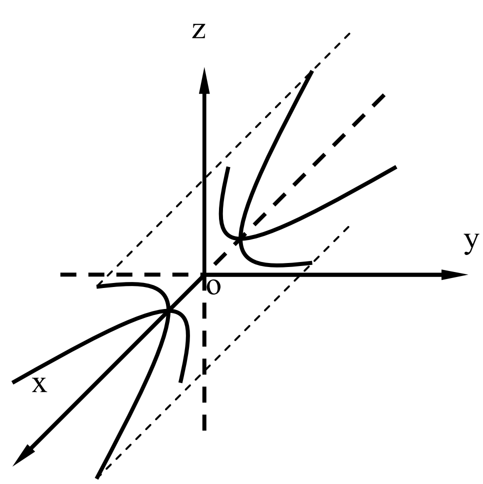


b) Intersección con el plano coordenado xz (y=0)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro hiperbólico de eje x centrado en el origen de coordenadas, cortado con el plano "xz" determinando una hipérbola de eje x sobre el plano coordenado "xz".





c) <u>Intersección con el plano coordenado "yz"</u> (x=0)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

No tiene solución real

No hay intersección con el plano coordenado "yz".

5- Intersección con planos paralelos a los planos coordenados

a) <u>Intersección con planos paralelos al plano yz</u> (x=k)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{k^2}{a^2} - 1 \\ x = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{k^2}{a^2} - 1\right)} + \dfrac{z^2}{c^2\left(\dfrac{k^2}{a^2} - 1\right)} = 1 \\ x = k \end{cases}$$

<u>Si k = 0</u>

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{0^2}{a^2} - 1\right)} + \dfrac{z^2}{c^2\left(\dfrac{0^2}{a^2} - 1\right)} = 1 \\ x = k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{-b^2} + \dfrac{z^2}{-c^2} = 1 \\ x = k = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = k = 0 \end{cases}$$

No tiene solución real.

Intersección correspondiente al plano "yz", ya estudiada. No hay intersección.

Si 0 < lkl < a

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{k^2}{a^2}-1\right)}+\dfrac{z^2}{c^2\left(\dfrac{k^2}{a^2}-1\right)}=1 \\ x=k \end{cases}$$

Por lo tanto: $\left(\dfrac{k^2}{a^2}-1\right)$ *< 0*

En este caso tampoco obtenemos intersección.

Si lkl = a

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{a^2}{a^2}-1 \\ x=|k|=a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0 \\ x=|k|=a \end{cases}$$

En este caso, la única posibilidad en que $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$ *es que los valores de y y los valores de z sean iguales a 0. Por lo tanto obtenemos una recta* $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$*, el eje x, que cortado con los planos* $x=\pm a$ *(x = a* $\wedge$ *x = -a) da como intersecciones dos puntos de coordenadas* P_1 *(a, 0, 0) y* P_2 *(-a, 0, 0) respectivamente.*

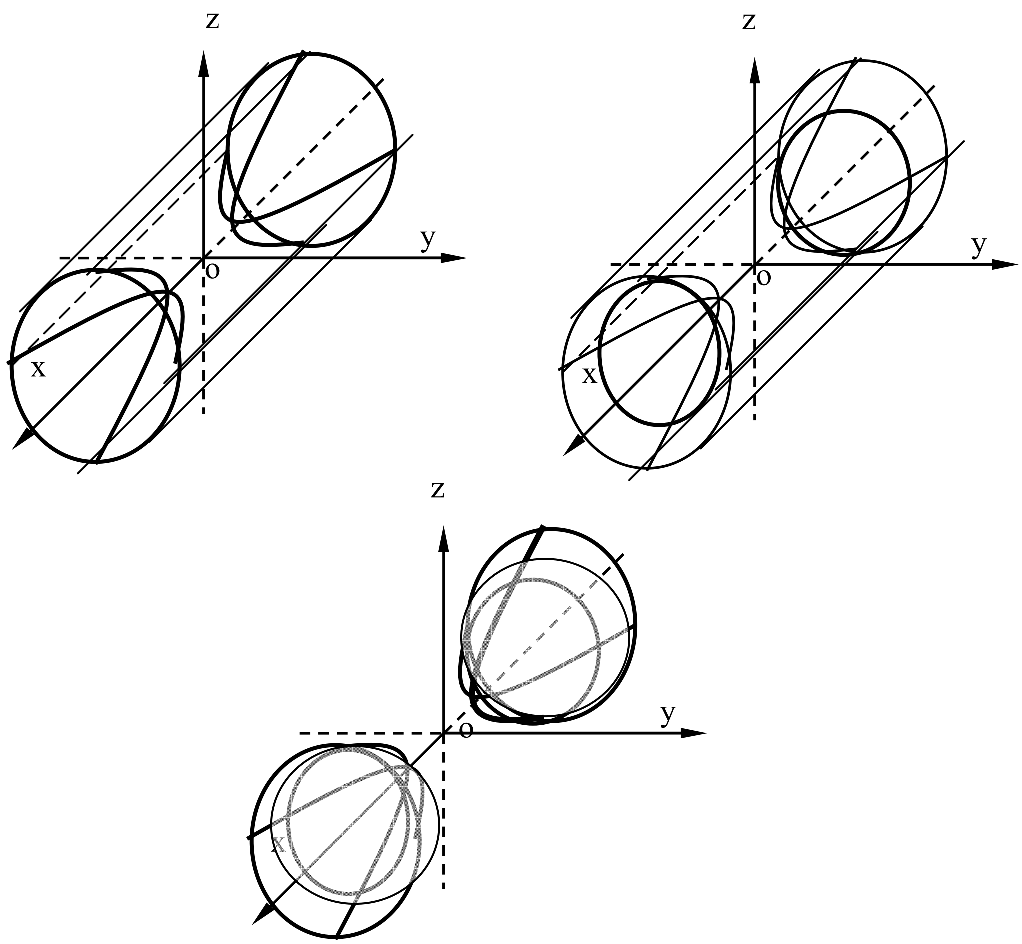
Si lkl > a

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{k^2}{a^2}-1\right)}+\dfrac{z^2}{c^2\left(\dfrac{k^2}{a^2}-1\right)}=1 \\ x=k \end{cases}$$

Debido a que: $\left(\dfrac{k^2}{a^2}-1\right)$ *> 0*

Por lo tanto, obtenemos un cilindro elíptico cortado con un plano paralelo al plano coordenado “yz”.

Para cada valor de k, independientemente de su signo, se obtiene como intersección una elipse. Los semiejes de las elipses obtenidas aumentan a medida que lkl aumenta.



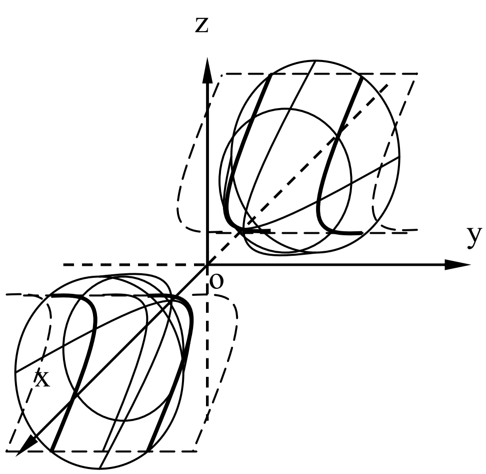
b) <u>Intersección con planos paralelos al plano "xz"</u> (y=k)

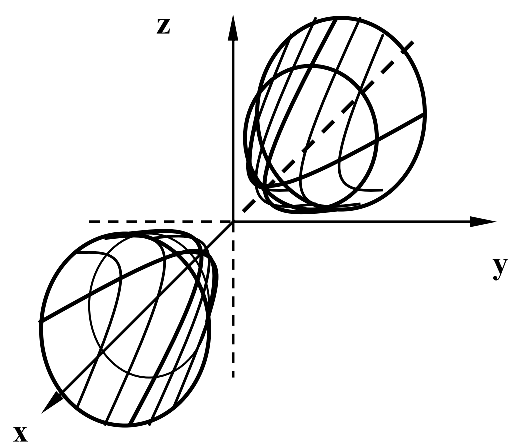
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{k^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 + \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{k^2}{b^2}\right)} - \dfrac{z^2}{c^2\left(1+\dfrac{k^2}{b^2}\right)} = 1 \\ y = k \end{cases}$$

Debido a que: $\left(1+\dfrac{k^2}{b^2}\right) > 0$

Obtenemos un cilindro hiperbólico de eje x cortado con un plano paralelo al plano coordenado "xz"
Para cada valor de k, independientemente de su signo, se obtiene como intersección una hipérbola de eje x. Los semiejes de las hipérbolas obtenidas aumentan a medida que lkl aumenta.



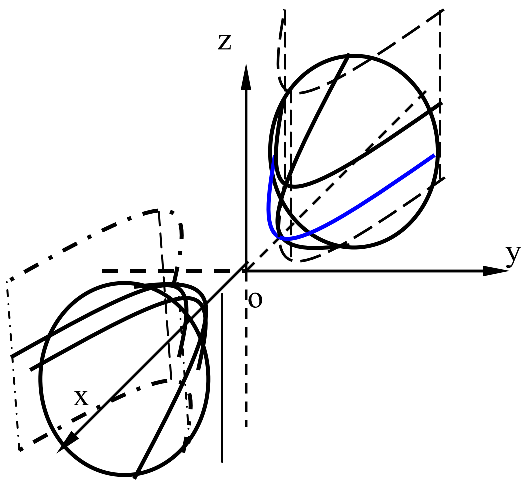


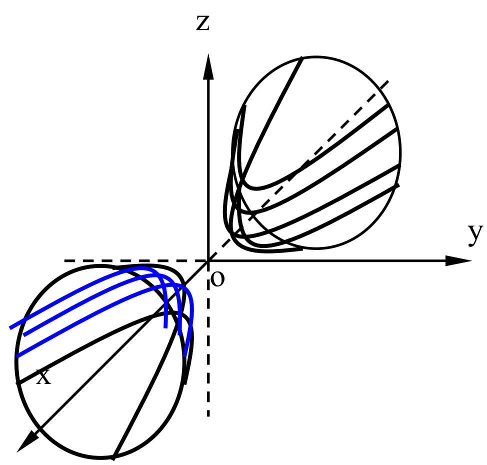
c) Intersección con planos paralelos al plano "xy" (z=k)

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ z=k\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{k^2}{c^2}=1\\ z=k\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{k^2}{c^2}\\ z=k\end{cases}$$

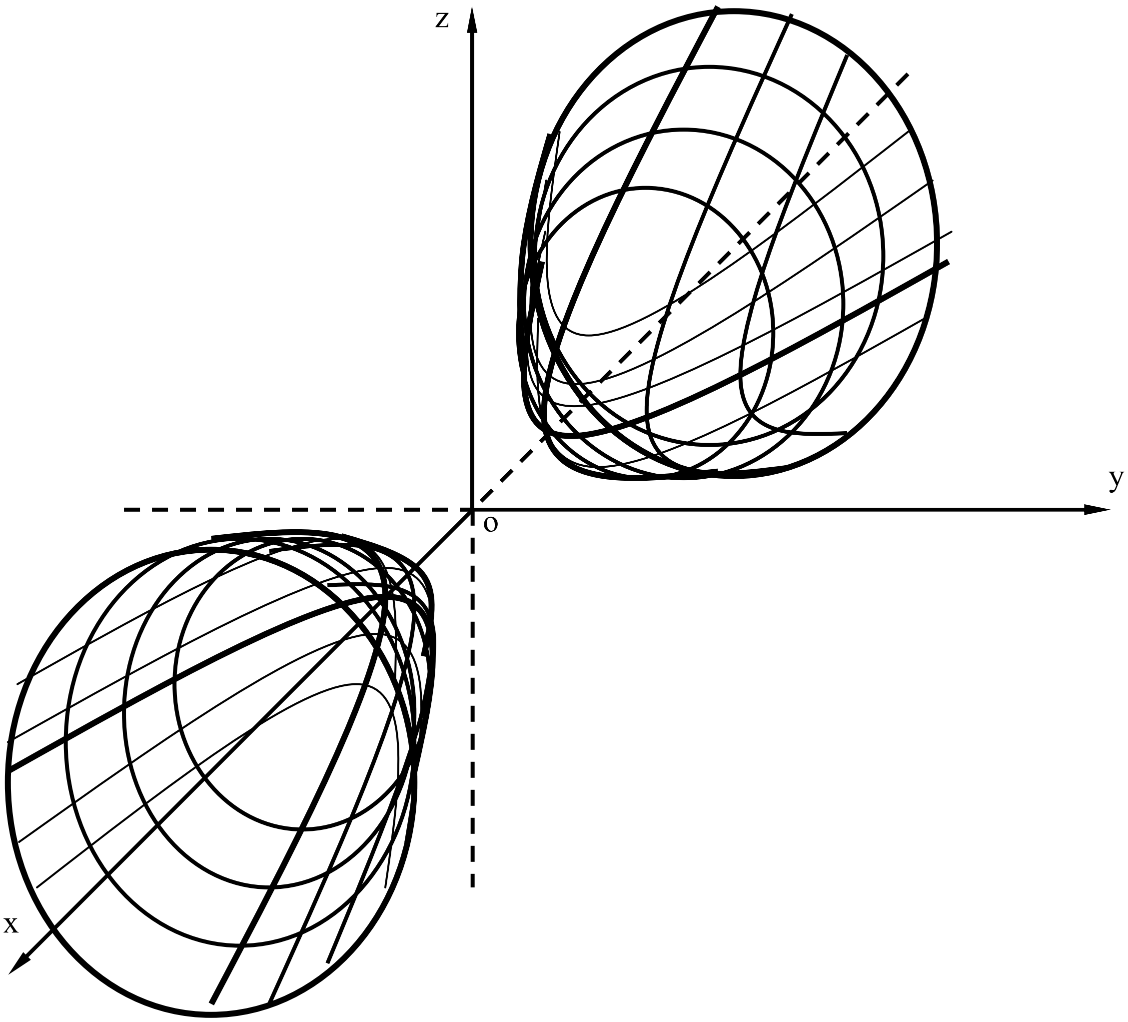
$$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{k^2}{c^2}\right)}-\dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{k^2}{c^2}\right)}=1\\ z=k\end{cases}$$

Obtenemos un cilindro hiperbólico de eje x centrado en el origen de coordenadas, cortado con el plano "xy".
Para cada valor de k, independientemente de su signo, se obtiene como intersección una hipérbola de eje x. Los semiejes de las elipses obtenidas aumentan a medida que lkl aumenta.





x



Nota: El hiperboloide de dos hojas puede ser considerado como una superficie de revolución con generatriz hiperbólica que gira alrededor de su eje real (el que la corta)