ESTUDIO DEL PARABOLOIDE ELÍPTICO

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z}$$

1 - Estudio de la Simetría

a) Simetría respecto a los planos coordenados

Simetría respecto al plano xy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2(-z)$$

Como la ecuación de la superficie se altera si cambiamos el signo de la variable z, concluimos que la superficie no es simétrica respecto al plano xy.

Simetría respecto al plano xz

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}=2z$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable y, concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano xz.

Simetría respecto al plano yz

$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable x, concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano yz.

b) Simetría respecto a los ejes coordenados

Simetría respecto al eje x

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}=2(-z)$$

Como la ecuación de la superficie se altera si cambiamos el signo de las variables y y z, podemos concluir que la superficie no es simétrica respecto al eje x.

<u>Simetría respecto al eje y</u>

$$\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2(-z)$$

Como la ecuación de la superficie se altera si cambiamos el signo de las variables x y z, podemos concluir que la superficie no es simétrica respecto al eje y.

<u>Simetría respecto al eje z</u>

$$\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = 2z$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables x e y, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al eje z.

c) <u>Simetría respecto al origen de coordenadas</u>

$$\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = 2(-z)$$

Como la ecuación de la superficie se altera si cambiamos el signo de las 3 variables, podemos concluir que la superficie no es simétrica respecto al origen de coordenadas.

2) <u>Verificar si la superficie contiene el Origen del Sistema de Coordenadas</u>

Reemplazando por el punto P(0,0,0) en la ecuación:

$$\frac{0^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 2.0$$

$$0 = 0$$

Se deduce que la superficie contiene al origen de coordenadas.

3) Intersección con los ejes coordenados

a) Intersección con el eje x

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

O sea que: x = y = z = 0
P (0, 0, 0) *(la intersección es el origen de coordenadas)*

b) Intersección con el eje y

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

O sea que: x = y = z = 0
P (0, 0, 0) *(la intersección es el origen de coordenadas)*

c) Intersección con el eje z

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=2z \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

O sea que: x = y = z = 0
P (0, 0, 0) *(la intersección es el origen de coordenadas)*

4- Intersección con los planos coordenados

a) Intersección con el plano coordenado "xy" (z = 0)

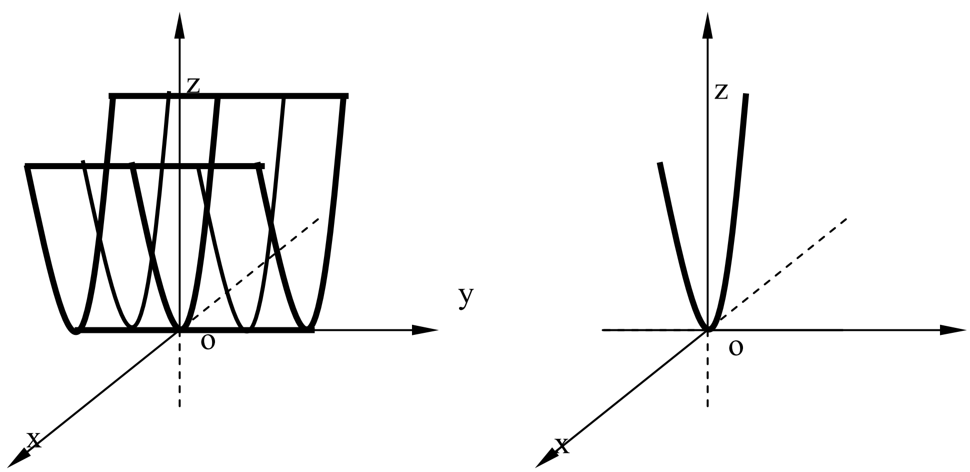
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0 \\ z=0 \end{cases}$$

En este caso, la única posibilidad en que $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ es que los valores de x y los valores de y sean iguales a 0, a lo largo del eje z. Por lo tanto obtenemos una recta coincidente con el eje z, que cortada con el plano z = 0 da como intersección un punto de coordenadas P (0, 0, 0),o sea, el origen d coordenadas..

b) Intersección con el plano coordenado "xz" (y = 0)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}=2z \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=2a^2z \\ y=0 \end{cases}$$

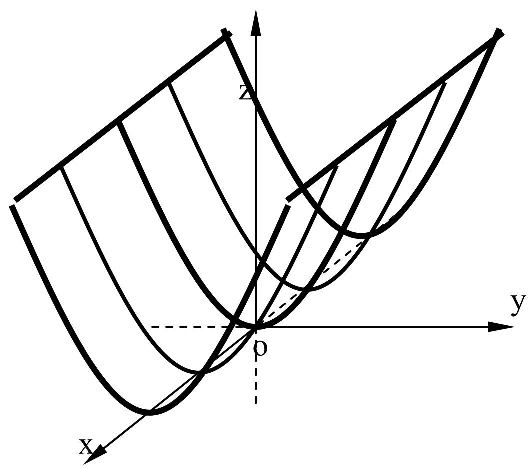
Obtenemos un cilindro parabólico de eje z, que abre sus ramas hacia las z positivas cortado con el plano "xz" determinan una parábola de eje z sobre el plano coordenado "xz"

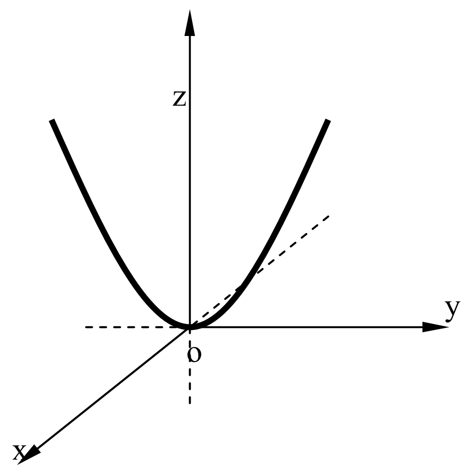


c) <u>Intersección con el plano coordenado "yz"</u> (x = 0)

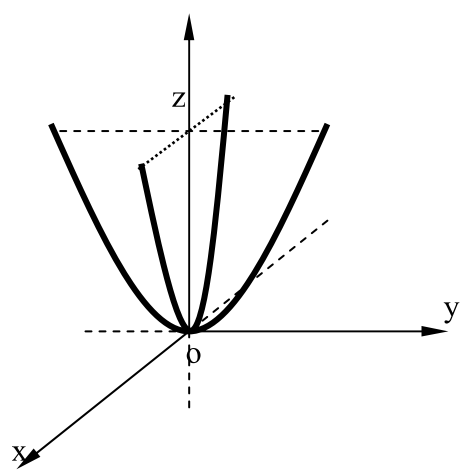
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y^2 = 2b^2 z \\ x = 0 \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro parabólico de eje z, que abre sus ramas hacia las z positivas, cortado con el plano yz
Parábola de eje z sobre el plano coordenado yz (plano del dibujo)





Las intersecciones obtenidas están representadas en la siguiente figura:



5. Intersección con planos paralelos a los planos coordenados

a) Intersección con planos paralelos al plano “xy” (z=k)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ z = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2k \\ z = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{2ka^2} + \dfrac{y^2}{2kb^2} = 1 \\ z = k \end{cases}$$

Si k = 0

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2k \\ z = k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = k = 0 \end{cases}$$

Intersección correspondiente al plano xy

En este caso, la única posibilidad en que $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ es que los valores de x y los valores de y sean iguales a cero es $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, recta que cortada con el plano z = k = 0 da como intersección el punto de coordenadas P (0,0,0).

Si k < 0

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2k \\ z = +k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = +2k \\ z = +k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{+2ka^2} + \dfrac{y^2}{+2kb^2} = 1 \\ z = +k \end{cases}$$ que para valores negativos de k no tiene solución

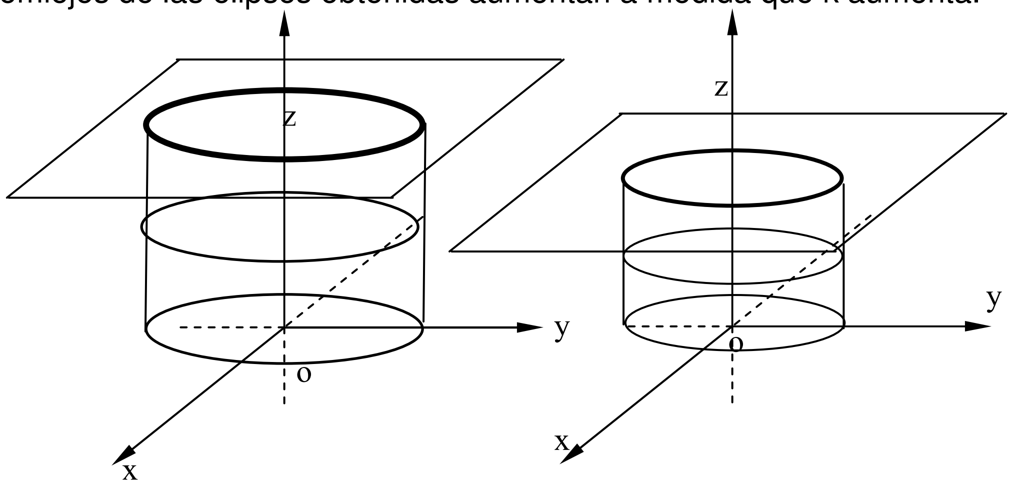
Por lo tanto, no existe intersección entre las superficies.

Si k > 0

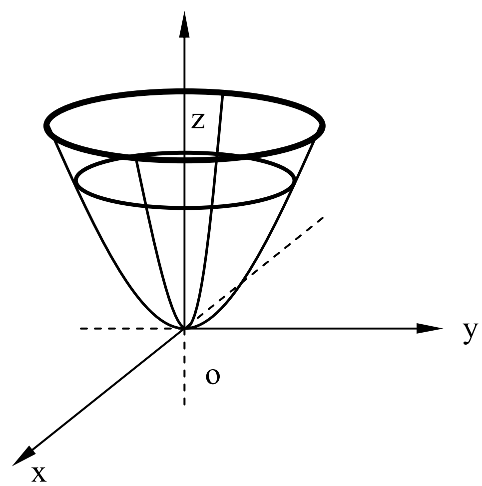
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2k \\ z = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{2ka^2} + \dfrac{y^2}{2kb^2} = 1 \\ z = k \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro elíptico cortado con un plano paralelo al plano coordenado xy

Para cada valor de k>0, se obtiene como intersección una elipse. Los semiejes de las elipses obtenidas aumentan a medida que k aumenta.



agregando estas intersecciones a las anteriormente encontradas, obtenemos:

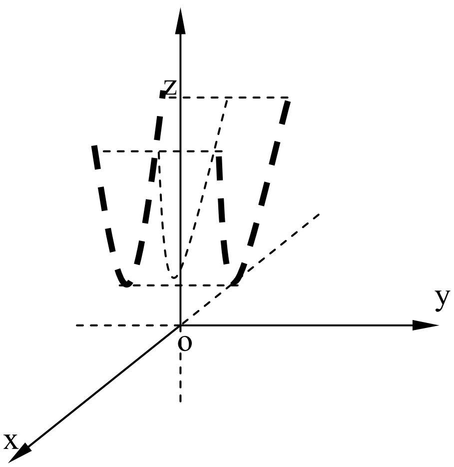


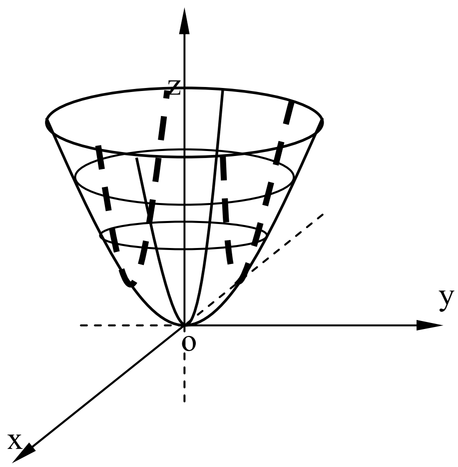
b) <u>Intersección con planos paralelos al plano xz</u> (y=k)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{k^2}{b^2} = 2z \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2a^2 z - \dfrac{k^2 a^2}{b^2} \\ y = k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2\left(z - \dfrac{k^2}{2b^2} \right) \\ y = k \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro parabólico de eje z, que abre sus ramas hacia las z positivas, cortado con un plano paralelo al plano coordenado xz.
Para cada valor de k se obtiene como intersección una parábola de eje paralelo al eje z





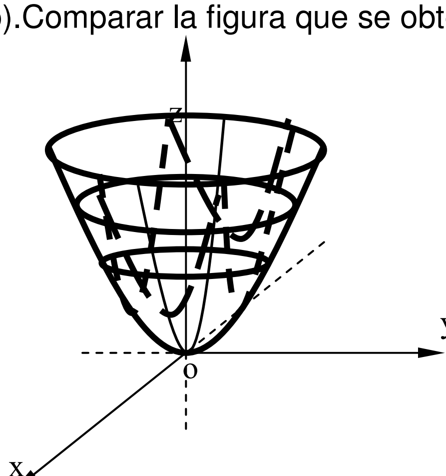
c) Intersección con planos paralelos al plano yz (x=k)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ x = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ x = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 2b^2 z - \dfrac{k^2 b^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 = 2b^2\left(z - \dfrac{k^2}{2a^2}\right) \\ x = k \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro parabólico de eje z, que abre sus ramas hacia las z positivas, cortado con un plano paralelo al plano coordenado yz.
Para cada valor de k, independientemente de su signo, se obtiene como intersección una parábola de eje paralelo al eje z.

Actividad: realizar la interpretación de esta intersección. Resulta similar a la construida en b).Comparar la figura que se obtenga con la siguiente



Actividad: Definir el paraboloide elíptico como superficie de revolución.