# ESTUDIO DEL PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

$$\boxed{\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z}$$

## 1 - Estudio de la Simetría

### a) Simetría respecto a los planos coordenados

Simetría respecto al plano “xy”

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2(-z)$$

Como la ecuación de la superficie se altera si cambiamos el signo de la variable z, concluimos que la superficie no es simétrica respecto al plano “xy”.

Simetría respecto al plano “xz”

$$\frac{x^2}{p} - \frac{(-y)^2}{q} = 2z$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable y, concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano “xz”.

Simetría respecto al plano “yz”

$$\frac{(-x)^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de la variable x, concluimos que la superficie es simétrica respecto al plano “yz”.

### b) Simetría respecto a los ejes coordenados

Simetría respecto al eje x

$$\frac{x^2}{p} - \frac{(-y)^2}{q} = 2(-z)$$

Como la ecuación de la superficie se altera si cambiamos el signo de las variables y y z, podemos concluir que la superficie no es simétrica respecto al eje x.

Simetría respecto al eje y

$$\frac{(-x)^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2(-z)$$

Como la ecuación de la superficie se altera si cambiamos el signo de las variables x y z, podemos concluir que la superficie no es simétrica respecto al eje y.

Simetría respecto al eje z

$$\frac{(-x)^2}{p} - \frac{(-y)^2}{q} = 2z$$

Como la ecuación de la superficie no se altera si cambiamos el signo de las variables x e y, podemos concluir que la superficie es simétrica respecto al eje z.

**c) Simetría respecto al origen de coordenadas**

$$\frac{(-x)^2}{p} - \frac{(-y)^2}{q} = 2(-z)$$

Como la ecuación de la superficie se altera si cambiamos el signo de las 3 variables, podemos concluir que la superficie no es simétrica respecto al origen de coordenadas.

**2- Verificar si la superficie contiene o no el Origen del Sistema de Coordenadas**

Reemplazando por el punto P(0,0,0) en la ecuación:

$$\frac{0^2}{p} - \frac{0^2}{q} = 2.0$$

$$0 = 0$$

Se deduce que la superficie contiene al origen de coordenadas.

## 3- Intersección con los ejes coordenados

### a) Intersección con el eje x

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

O sea que: x = y = z = 0
P (0, 0, 0)

### b) Intersección con el eje y

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{y^2}{q} = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y^2 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

O sea que: x = y = z = 0
P (0, 0, 0)

### c) Intersección con el eje z

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2z \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

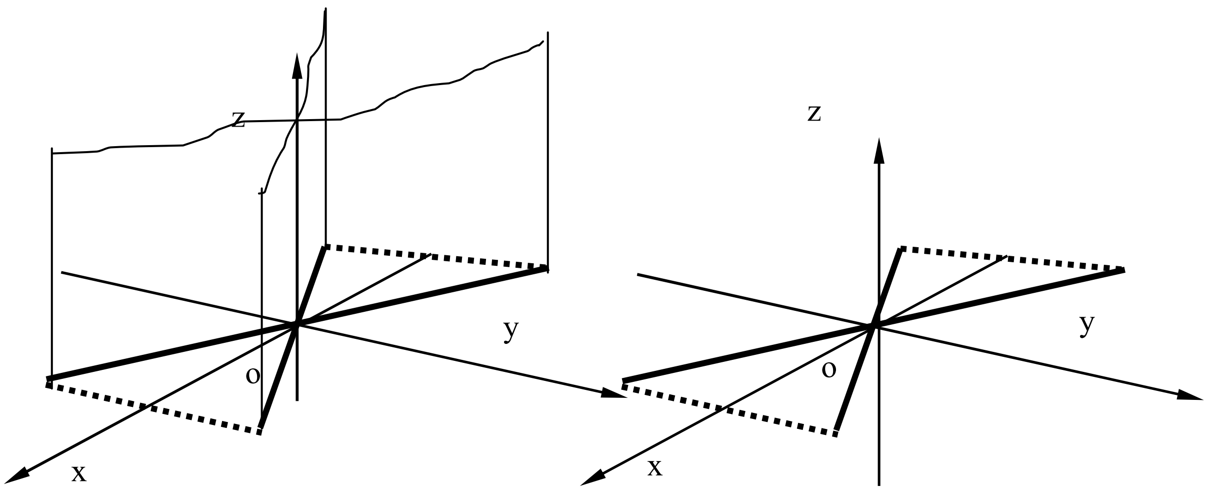
O sea que: x = y = z = 0 P (0, 0, 0)

**4- Intersección con los planos coordenados**

**a) Intersección con el plano coordenado "xy" (z=0)**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left( \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} \right) \bullet \left( \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} \right) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

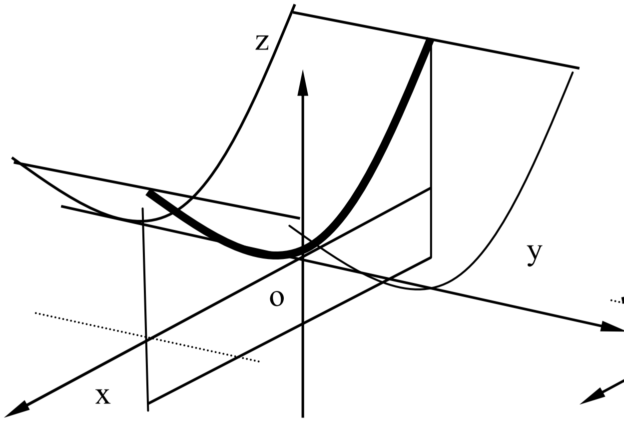
Obtenemos un par de planos cortado con el plano "xy". La intersección es un par de rectas sobre el plano coordenado "xy".

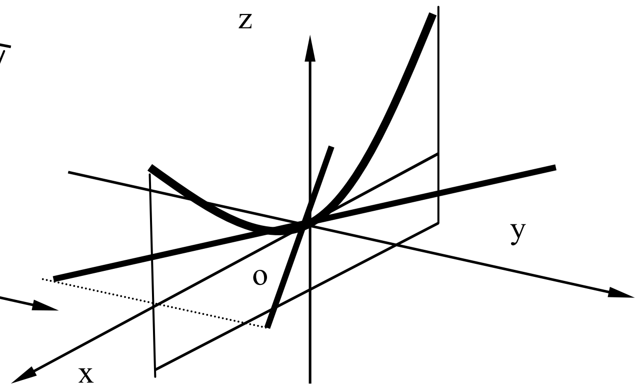



**b) Intersección con el plano coordenado "xz" (y=0)**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} = 2z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro parabólico de eje z, que abre sus ramas hacia las z positivas cortado con el plano "xz" determinando una parábola de eje z sobre el plano coordenado "xz".

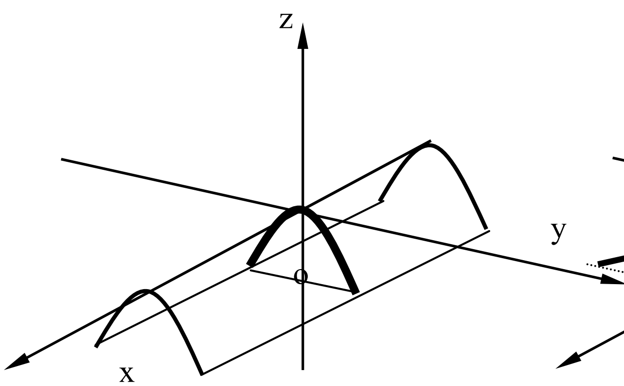


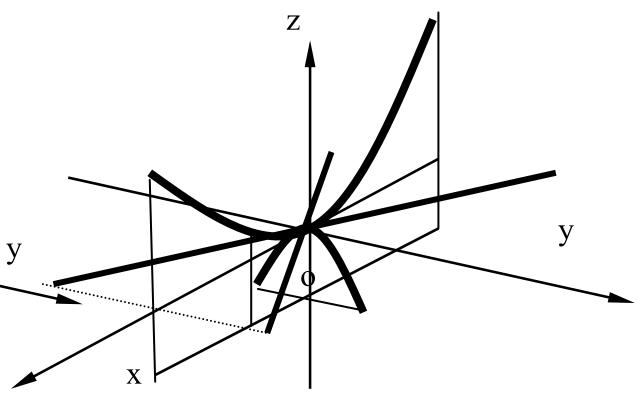




**c) <u>Intersección con el plano coordenado “yz”</u> (x=0)**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{y^2}{q} = 2z \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = -2qz \\ x = 0 \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro parabólico de eje z, que abre sus ramas hacia las z negativas, cortado con el plano “yz” determinando una p*arábola de eje z sobre el plano coordenado “yz”.*



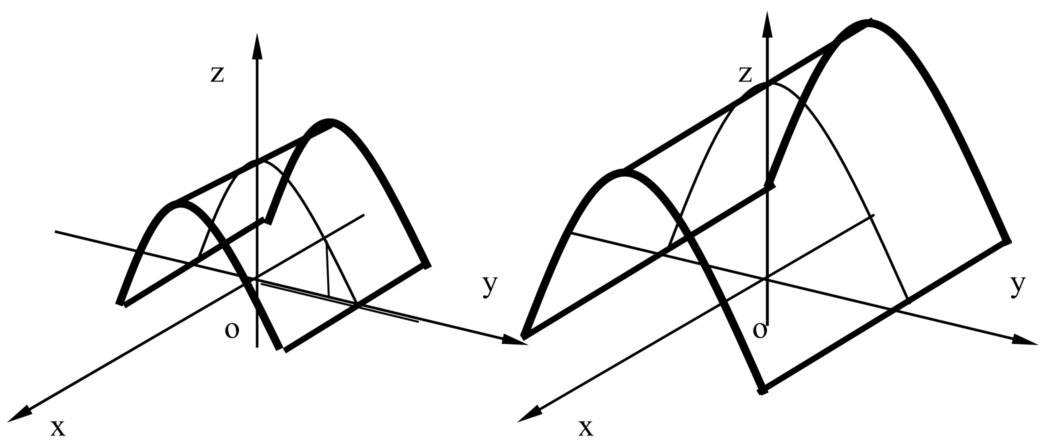



## 5- Intersección con planos paralelos a los planos coordenados

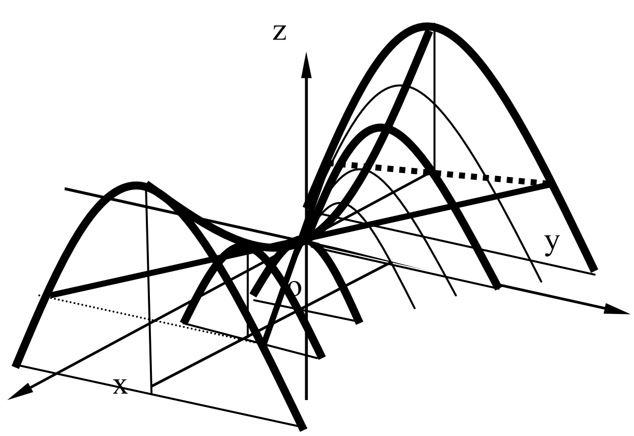
### a) Intersección con planos paralelos al plano “yz” (x=k)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ x = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ x = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = -2qz + \dfrac{k^2 q}{p} \\ x = k \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro parabólico de eje z, que abre sus ramas hacia las z negativas, cortado con un plano paralelo al plano coordenado “yz”.
Para cada valor de k, independientemente de su signo, se obtiene como intersección una parábola de eje paralelo al eje z.




Las intersecciones realizadas hasta aquí, nos dan la siguiente figura:



## b) Intersección con planos paralelos al plano "xz" (y=k)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{k^2}{q} = 2z \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2pz + \frac{k^2 p}{q} \\ y = k \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro parabólico de eje z, que abre sus ramas hacia las z positivas, cortado con un plano paralelo al plano coordenado "xz".
Para cada valor de k se obtiene como intersección una parábola de eje paralelo al eje z

**Actividad:** Efectuar la interpretación gráfica de esta intersección.

## c) Intersección con planos paralelos al plano "xy" (z=k)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2k \\ z = k \end{cases}$$

**Si k = 0**

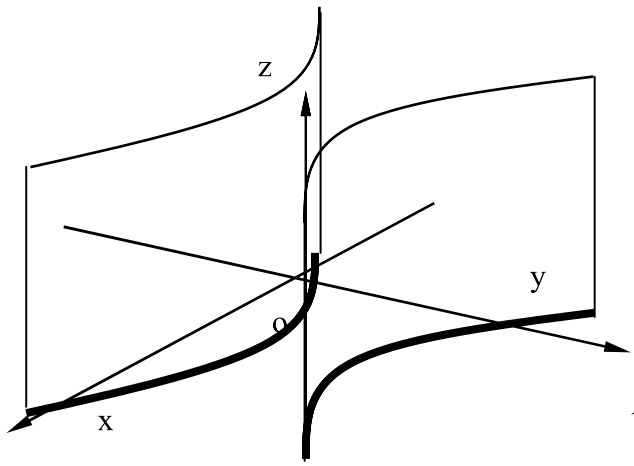
$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0 \\ z = k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left( \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) \bullet \left( \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = 0 \\ z = k = 0 \end{cases}$$

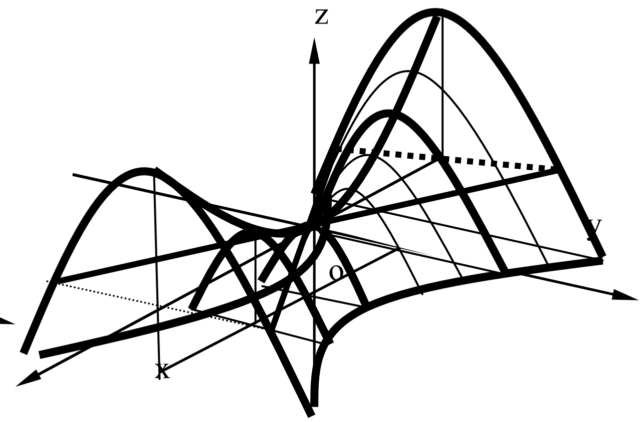
Intersección correspondiente al plano "xy"
Obtenemos un par de planos cortado con el plano "xy" que nos da un par de rectas sobre el plano coordenado "xy".
*(Ver intersección con el plano "xy")*

**Si k < 0**

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2k \\ z = k \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro hiperbólico cortado con un plano paralelo al plano coordenado xy.
Por ser k negativo se obtiene como intersección una hipérbola de eje paralelo al eje y.

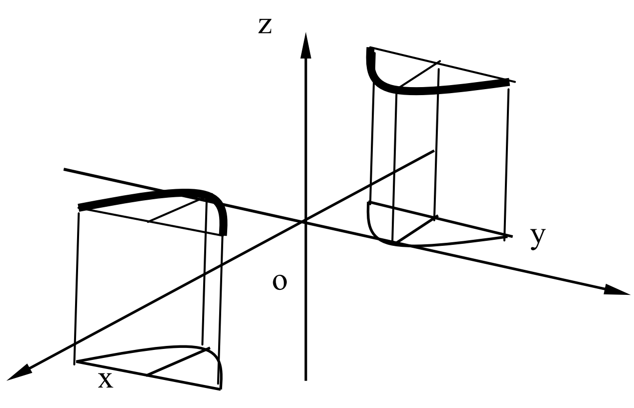


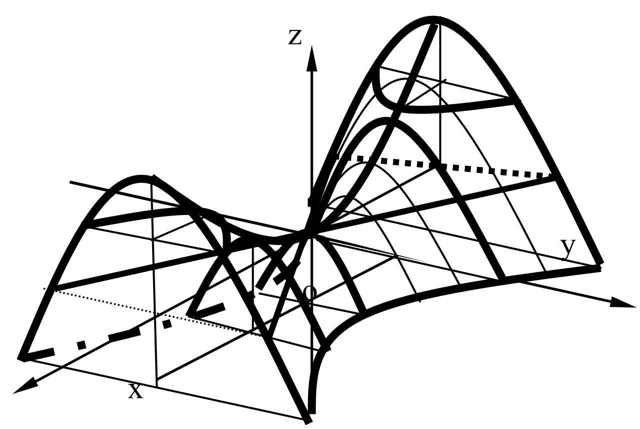




**Si k > 0**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ z = k \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2k \\ z = k \end{cases}$$

Obtenemos un cilindro hiperbólico cortado con un plano paralelo al plano coordenado “xy”.
Para cada valor de k se obtiene como intersección una hipérbola de eje paralelo al eje x.




La figura de la derecha corresponde al paraboloide hiperbólico terminado.

El paraboloide hiperbólico puede estudiarse del mismo modo que se utilizó para el hiperboloide de una hoja por ser ambas, superficies regladas.

Partiendo de la ecuación $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ , podemos escribir el sistema:

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 2kz \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{1}{k} \end{cases} \text{; o bien : } \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = k \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{2z}{k} \end{cases}$$

sistemas de ecuaciones que tienen como lugar geométrico, cada uno de ellos, una recta.

Variando el valor del parámetro *k* obtenemos dos haces de rectas (generatrices del paraboloide hiperbólico)