ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
Trabajo Práctico Nº 11
Transformaciones lineales
Año 2019

Transformaciones lineales

Definición y propiedades de las transformaciones lineales

Ingeniería y transformaciones lineales

Situación inicial 1:

El balancín extractor de petróleo realiza un movimiento oscilatorio alrededor de su punto de apoyo. Se desea describir el movimiento del cabezal del balancín.

a) Defina un sistema de coordenadas apropiado y trace un esquema que represente la situación.

b) A partir de una posición inicial del balancín (ángulo inicial), trace un giro de un ángulo θ en sentido contrario al de las agujas del reloj, e intente describir las coordenadas de la nueva posición del cabezal.

Figura 9-1*a* Balancín extractor de petróleo.

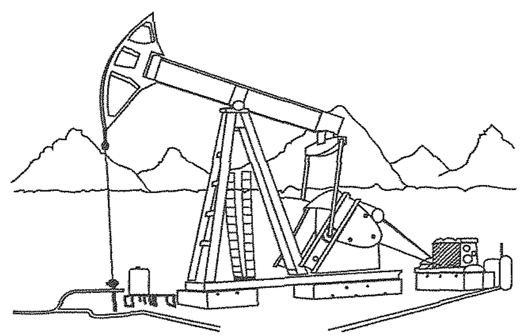
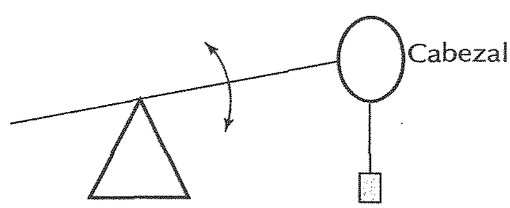


Figura 9-1*b* Esquema del balancín extractor de petróleo.



Situación inicial 2:

Sobre una viga empotrada actúa una fuerza F provocando cierta deformación. Se desea obtener una expresión que permita indicar la posición de cada punto de la viga, luego de la deformación.

a) Defina un sistema de coordenadas apropiado para describir la situación.

b) Intente describir las coordenadas de cualquier punto de la viga en función de la deformación.

Figura 9-2

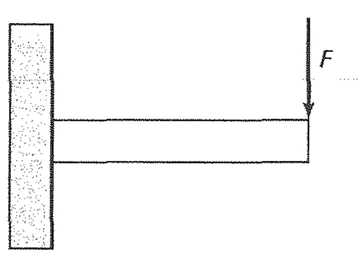
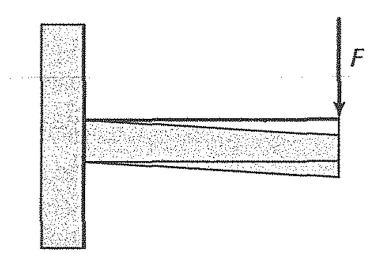


Figura 9-3



Las situaciones de ingeniería fueron extraídas del libro Nociones de Geometría Analítica y Algebra Lineal (Ana Maria Kozak, Sonia Pompella Pastorelli,Pedro Emilio Vardanega)

Nota Importante: En los parciales asociados a la Aprobación Directa, el alumno deberá ser capaz de reproducir las demostraciones, las deducciones y los desarrollos vistos en teoría o existentes en la bibliografía recomendada a tal fin por la catedra.

Desarrollo Temático de la Unidad

Transformaciones Lineales. Definición. Propiedades. Núcleo e imagen de una transformación lineal. Matriz asociada a una transformación lineal. Matriz del cambio de base. Semejanza de Matrices. Autovalores y autovectores. Diagonalización. Matriz asociada a una base de autovectores. Diagonalización de una Matriz simétrica. Propiedades. Norma de vectores y matrices.

Ejercitación a desarrollar en el aula: 1a, 1c, 1d, 1f, 2a, 3, 4a, 5, 6.
Los demás ejercicios deben ser realizados por los alumnos.

1.- Verificar si las siguientes funciones son Transformaciones Lineales.

a) T: $R_3 \rightarrow R_2$ dada por: $T(x,y,z) = (0, x + y)$

b) T: $R_2 \rightarrow R_2$ dada por: $T(x,y) = (2x +1 , y)$

c) T: $R_2 \rightarrow R_1$ dada por: $T (x,y) = 3y$

d) T: $R_3 \rightarrow R_2$ dada por: $T(x,y,z)=(x + y , y – z)$.Si es una T.L. hallar la imagen de $(1,2,3)$

e) T: $R_2 \rightarrow R_3$ dada por: $T(x,y)=(4 x ; x-y ; x+y)$.

f) T: $R_2 \rightarrow P_2$ dada por: $T(a,b)=ax^2+bx+1$

g) T: $P_2 \rightarrow R_3$ dada por: $T(ax^2+bx+c)=(a-c; c ; -2c)$

2.- a) Sea T: $R_3 \rightarrow R_2$, y $[v]=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ una base del R_3 y $\{(1,2),(1,2),(-1,1)\}$ tres vectores del R_2. Hallar la ley de transformación $T(x,y,z)$

b) Sea T: $R_3 \rightarrow R_4$, y $[v]=\{(1,0,-1),(0,2,1),(0,0,-1)\}$ una base del R_3 y $\{(1;0;1;1),(0;0;1;0),(2;3;0;0)\}$ tres vectores del R_4. Hallar la ley de transformación $T(x,y,z)$

3.- Si la $T(x,y)$ tiene como matriz asociada a la base canónica es: $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

a) Hallar la ley de transformación $T(x,y)$
b) Obtener los autovalores y autovectores

c) Verificar que los autovectores conforman una base ortogonal
d) Escribir la matriz en base de autovectores

4.- Las siguientes matrices son de operadores $T(x,y)$ y $T(x,y,z)$ respectivamente, en base canónica. Para ellas se pide:
a) Hallar la ley de Transformación
b) Obtener los autovalores y autovectores
c) Verificar que los autovectores conforman base ortogonal

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad F=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.- Dada la transformación lineal: $T\langle x, y\rangle = \langle 12x+9y, 11x+10y\rangle$

a) Justificar que con los autovectores *T* puede formar una base de R^2.
b) Determinar si existe una matriz diagonal asociada a *T* y en caso afirmativo hallarla.

6.- Se sabe que una transformación lineal $T: R^3 \to R^3$ tiene autovalor $\lambda_1 = 3$ con multiplicidad geométrica *1* y el autovalor $\lambda_2 = 5$ con multiplicidad geométrica *2*. Justifique la existencia de la base de autovectores e indique cual puede ser una matriz asociada a la transformación referida a dicha base.