ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Trabajo Práctico Nº 2

Números complejos

Año 2019

Números complejos

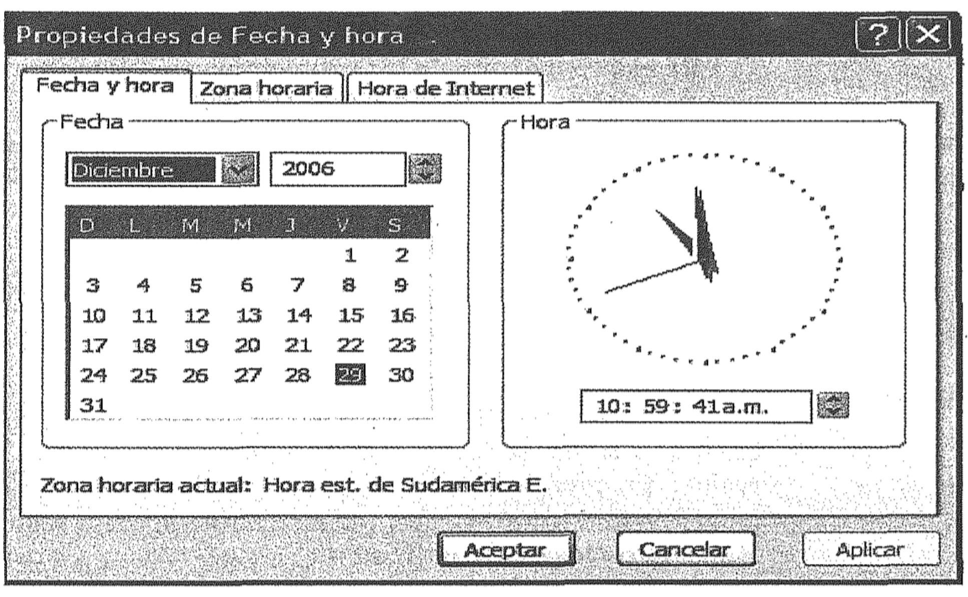
Ingeniería y números complejos

SITUACIÓN INICIAL 1:

Un estudiante de ingeniería electrónica se interesó en conocer el funcionamiento de las computadoras en cuanto a cómo pueden mostrar un reloj de agujas en la pantalla. Investigando, descubrió que el reloj podía ser representado en el plano cartesiano y que, para cada instante, la posición del minutero representa un número complejo.

Por ejemplo, suponiendo que la aguja mide 1 (es decir, el módulo del número es 1), 0 minutos representa al número i, 15 minutos representa al número 1, 30 minutos representa al número $-i$, y -1 representa 45 minutos.

Figura 11-1



a) ¿Por qué número complejo se debe multiplicar a i para pasar de 0 minutos a 15 minutos? ¿Y para pasar de 0 minutos a 45 minutos?

b) ¿Cuántos minutos después de cero están representados por los números complejos $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ y $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$?

SITUACIÓN INICIAL 2:

La impedancia compleja de un circuito eléctrico constituido por un resistor R, un capacitor C y un inductor L conectados en serie está dada por la siguiente expresión:

$z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$, donde j equivale a la unidad imaginaria i, R, L y C son constantes positivas para un circuito dado, y ω es variable y se le llama pulsación angular de la señal aplicada:

a) Determine $\omega > 0$ tal que $\text{Im}(z) = 0$. Físicamente, se dice que en este caso el circuito se comporta como resistivo puro.

b) Determine $\omega > 0$ tal que $\text{Im}(z) > 0$. Físicamente, se dice que en este caso el circuito se comporta como inductivo.

c) Determine $\omega > 0$ tal que $\text{Im}(z) < 0$. Físicamente, se dice que en este caso el circuito se comporta como capacitivo.

d) Determine $\omega > 0$ tal que $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$.

Nota: En electrónica se reemplaza la unidad imaginaria i por j, puesto que el símbolo i es empleado para denotar intensidad de corriente.

Las situaciones de ingeniería fueron extraídas del libro Nociones de Geometría Analítica y Algebra Lineal (Ana Maria Kozak, Sonia Pompella Pastorelli,Pedro Emilio Vardanega)

Desarrollo Temático de la Unidad

El número complejo. La unidad imaginaria: sus potencias. Forma de par ordenado y binómica de un complejo. Operaciones. Complejo conjugado. Sistema de representación polar. Transformación entre los sistemas cartesiano y polar. Forma polar o trigonométrica de los números complejos: producto, potencia (Fórmula de De Moivre) y cociente. Raíz n-ésima de un complejo. Aplicaciones.

Ejercitación a desarrollar en el aula:

1.- Representar los siguientes números complejos e indicar las componentes reales e imaginarias. Identificar complejos reales puros, complejos imaginarios puros y complejo nulo.

a) $3-4i$ b) 5
c) 0 d) $\sqrt{2}i$

2.- Dado el Z hallar $\overline{Z}$ y $-Z$. Representar gráficamente

- a) $z = 3 + 4i$ b) $z = 3i$ c) $z = 2$

3.- Resolver las siguientes operaciones:

a) $(6-5i)+(2-i)-(-5+6i)=$

b) $(2-3i)-(5+4i).(6-4i)=$

c) $(1-4i)/(3+i)=$

d) $(-i+1).(3-2i).(1+3i)=$

4.- Escribe en forma polar los siguientes números complejos:

a) $z=1+i$

b) $z=-\sqrt{3}-i$

c) $z=-1+i$

d) $z=5-12i$

e) $z=3i$

f) $z=-5$

5.- Efectuar las operaciones en forma trigonométrica de:

a) $Z_1 \bullet Z_2$

b) $\dfrac{Z_1}{Z_2}$

c) $\dfrac{Z_1}{(Z_2)^2}$

con $Z_1 = 4(\cos 60º + i sen 60º)$
$Z_2 = 2(\cos 15º + i sen 15º)$

6.- Calcular aplicando la fórmula de Moivre

a) $(1+i)^6=$

b) $(-1+2i)^8=$

7.- Calcular y graficar.

a) siendo $Z=1+\sqrt{3}i$ calcular $\sqrt[3]{Z}$.

b) siendo $Z=-2-\sqrt{3}i$ calcular $\sqrt[4]{Z}$.

8.- Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4+1=0$

b) $x^2+4=0$

9.- Sabiendo que $W_0 = 2(\cos 15º + i sen 15º)$ es una de las raíces quinta de un complejo. Calcular las restantes raíces.

Los siguientes ejercicios deben ser realizados por los alumnos

1.- Representa gráficamente los siguientes números complejos.

a) $5-3i$

b) $+5i$

c) $-5i$

d) 5

2.- Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de:

a) $3-5i$

b) $5+2i$

c) $-1-2i$

d) $-2+3i$

3.- Siendo $Z_1 = (2,3)$; $Z_2 = (5,-2)$; $Z_3 = (-3,-2)$ efectuar las siguientes operaciones, dando el resultado del complejo Z como para ordenado:

a) $Z_1 + Z_2$ b) $Z_1 - Z_2$ c) $2Z_1 + 4Z_2$

d) $\dfrac{Z_1 + Z_2}{Z_3}$ e) $(2Z_3 + 2Z_2).Z_1$ f) $\dfrac{Z_1}{Z_2}$

4.- Dados los siguientes números complejos:

$z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 3 - 4i$; $z_3 = -2 + 3i$; $z_4 = 5i$

Calcular:

a) $z_2 - z_2 + z_3$ b) $z_4 + (z_3 - z_2)^2$ c) $\dfrac{2z_1}{z_3} + \overline{z_2}$

6.- Demostrar las siguientes propiedades, con $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$

a) $\overline{\overline{Z_1}} = Z_1$ b) $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$ c) $\overline{Z_1 \bullet Z_2} = \overline{Z_1} \bullet \overline{Z_2}$

d) $Z_1 \bullet \overline{Z_1} = |Z_1|^2$ e) $Z_1 + \overline{Z_1} = 2\,\mathrm{Re}(Z_1)$ f) $Z_1 - \overline{Z_1} = 2\,\mathrm{Im}(Z_1)$

g) $\overline{\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)} = \dfrac{\overline{Z_1}}{\overline{\overline{Z_2}}}$

7.- Expresar en forma polar o trigonométrica

a) $Z = 1 + \sqrt{3}i$ b) $Z = \sqrt{12} - 2i$

c) $Z = -1 - i$ d) $Z = -\sqrt{2}i$

8.- Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:

a) $5_{(\pi/6)\,\mathrm{rad}}$ b) 2_{135^o} c) 2_{495^o} d) 3_{240^o}

9.- Calcular aplicando la fórmula de Moivre

a) $(1 + i)^5$ b) $\left(-\sqrt{5} + \sqrt{15}i\right)^6$

10.- Calcular: i^4; i^8; i^{23}; i^{11420}.

11.- Hallar en forma trigonométrica las raíces tercera y cuarta respectivamente de:

a) $z_1 = 2 + 3i$ b) $z_2 = 3 - 4i$.

12.- Calcular y graficar.

a) siendo $Z = 4i$ calcular $\sqrt[3]{Z}$. b) siendo $Z = 2 - 2i$ calcular $\sqrt{Z}$.

13.- Resuelve las ecuaciones:

a) $x^6 + 64 = 0$ b) $x^2 + 6x + 10 = 0$