ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Trabajo Práctico Nº 5

Recta en R^2, Plano y Recta en R^3

Año 2019

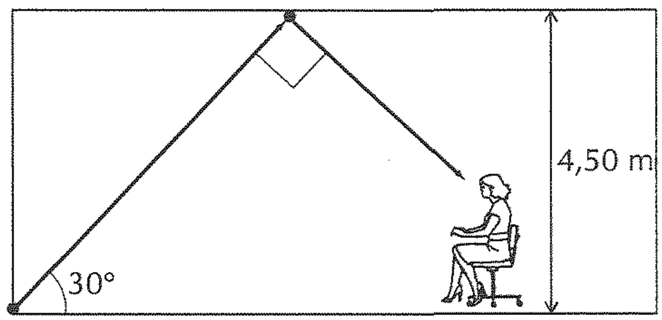
Ingeniería y rectas

Situación inicial 1:

Un haz sonoro y direccional es emitido con ángulo de 30°, respecto de la horizontal, y se refleja en el cielorraso (también horizontal) ubicado a 4,50 metros de altura.

Si el ángulo de reflexión es recto, ¿a qué distancia del origen de coordenadas elegido (coincidente con la fuente emisora) debería colocarse una persona para optimizar la recepción del sonido?

Figura 2-1

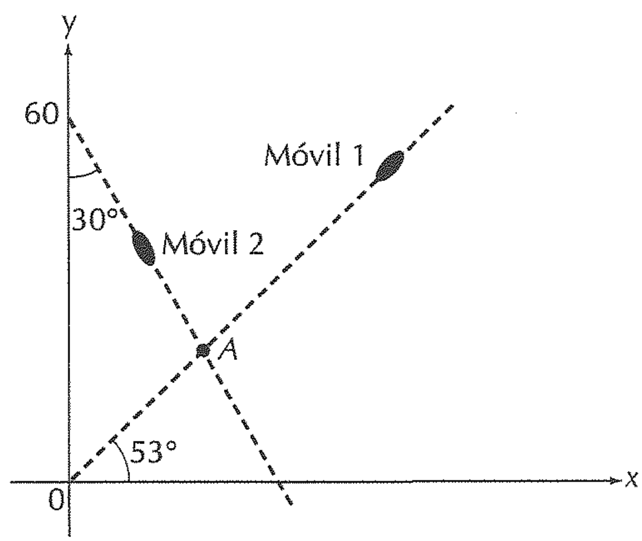


Situación inicial 2:

Un móvil se traslada con trayectoria rectilínea, la cual forma un ángulo de 53° con la horizontal, de acuerdo con la figura 2-2 que se muestra, iniciando en el tiempo t_0 su recorrido desde la coordenada (0; 0) a velocidad constante de 12 metros por segundo.

Desde un punto de coordenadas (0; 60) parte simultáneamente otro móvil, cuya trayectoria forma una ángulo de 30° con el eje de ordenadas elegido, y se desplaza a velocidad constante.

Figura 2-2



a) Obtener las coordenadas del punto *A* de encuentro de ambas trayectorias.

b) ¿A qué velocidad debe desplazarse el segundo móvil para coincidir con el primero en el punto de encuentro de las trayectorias?

Nota Importante: En los parciales asociados a la aprobación directa, el alumno deberá ser capaz de reproducir las demostraciones, las deducciones y los desarrollos vistos en teoría o existentes en la bibliografía recomendada a tal fin por la cátedra.

Ejercitación a desarrollar en el aula:
Se deberá desarrollar en el **aula** los **ejercicios**
Recta en R^2 : 1a, 1g, 1h ,2c ,3c ,4a ,5a ,5d ,6d, 7c, 8a
Plano: 10d, 11a, 12a, 13g, 14, 15a, 16b , 17a, 18a.
Recta en R^3 : 19a , 20a, 22b, 23b, 24, 25, 27, 30a, 32a.
Los demás ejercicios deben ser realizados por los alumnos.

La recta en el espacio bidimensional

1.- Hallar la ecuación vectorial, paramétrica, cartesiana simétrica, general, segmentaria, explicita y Normal de las siguientes rectas:

a) Paralela al vector $\vec{v} = 2\breve{i} + 3\breve{j}$ y pasa por el punto $P(1,3)$.
b) Paralela al vector $\vec{v} = \breve{i} + \breve{j}$ y pasa por el punto $P(0,4)$.
c) Paralela al vector $\vec{v} = -2\breve{i} + \breve{j}$ y pasa por el punto $P(-5,2)$.
d) Paralela al vector $\vec{v} = 7\breve{i} + 7\breve{j}$ y pasa por el punto $P(0,0)$.
e) Paralela al vector $\vec{v} = 4\breve{i} + 6\breve{j}$ y pasa por el punto $P(5,1)$.
f) Paralela al vector $\vec{v} = -2i - 2j$ y pasa por el punto $P(3,3)$.
g) Comparar las pendientes en las ecuaciones explicitas de los puntos a) y e), que observa? ¿A qué se debe la observación? ¿Esto mismo sucede con algunos otros puntos?
h) Identificar la distancia al origen de las rectas de los puntos a) y e) observando su ecuación normal.

2.- Hallar las ecuaciones cartesianas simétricas, segmentaria y explícita de las rectas que pasan por los siguientes puntos:

a) $P_1(3,1)$ y $P_2(5,4)$
b) $P_1(1,1)$ y $P_2(0,0)$
c) $P_1(5;0)$ y $P_2(0;2)$.-
d) $P_1(1;0)$ y $P_2(0;1)$.-

3.- Hallar la ecuación general de las siguientes rectas:

a) Que pasa por el punto (3,5) y su vector normal es $\vec{v} = 2\breve{i} + 3\breve{j}$.-
b) Que pasa por el punto (2,-1) y su vector normal es $\vec{v} = \breve{i} + \breve{j}$.-
c) Que pasa por el punto (4,3) y su vector normal es $\vec{v} = 5\breve{i} + 2\breve{j}$.-

4.- Hallar la distancia ***d*** desde.

a) La recta $8x + 15y - 24 = 0$ al punto $(-2,-3)$.
b) La recta con ordenada al origen 5 y abscisa al origen 2 al punto $(3,2)$.

c) la recta $\frac{x-2}{3}+\frac{y+1}{5}=1$ al punto *(3,2)*.

d) la recta $8x+5y-24=0$ al punto *(0,0)*.

5.- Hallar el valor de "w" para que las siguientes rectas sean paralelas.

a) $\frac{x-2}{3}+\frac{y+1}{5}=1$; $\frac{x+12}{w}+\frac{y-1}{5}=1$

b) $\frac{x-2}{3}+\frac{y+1}{5}=1$; $6x+wy+5=0$

c) $(x,y)=(2,5)+\lambda(4,2)$; $6x+wy-1=0$

d) $\begin{vmatrix} x=5+2\lambda \\ y=3-4\lambda \end{vmatrix}$; $wx+2y-1=0$

6.- Hallar el valor de "w" para que las siguientes rectas sean perpendiculares.

a) $\frac{x-2}{3}+\frac{y+1}{5}=1$; $\frac{x+1}{5}+\frac{y-1}{w}=1$

b) $\frac{x}{4}+\frac{y+1}{2}=1$; $wx+3y-7=0$

c) $(x,y)=(2,5)+\lambda(4,2)$; $wx+5y+1=0$

d) $\begin{vmatrix} x=5+2\lambda \\ y=3-4\lambda \end{vmatrix}$; $wx+2y-1=0$

7.- Hallar el ángulo entre las siguientes rectas.

a) $8x+5y-24=0$; $\frac{x-2}{3}+\frac{y+1}{5}=1.$

b) $x-2y+5=0$; $y=2x+3$

c) $\begin{vmatrix} x=5+2\lambda \\ y=3-4\lambda \end{vmatrix}$; $4x-2y+5=0$

8.- Hallar el valor del parámetro K de manera tal que:

a) $3kx+5y+k\ \ 2=0$ pase por el punto *(-1,4)*.

b) $4x-ky-7=0$ tenga pendiente 3.

c) $kx+y=3k-6$ tenga abscisa en el origen igual a 5.

9.- Hallar las ecuaciones de las rectas que:

a) Pasa por (-3,1) y tiene pendiente 2.

b) Pasa por (0,4) y es paralela a *2x-y+1=0*

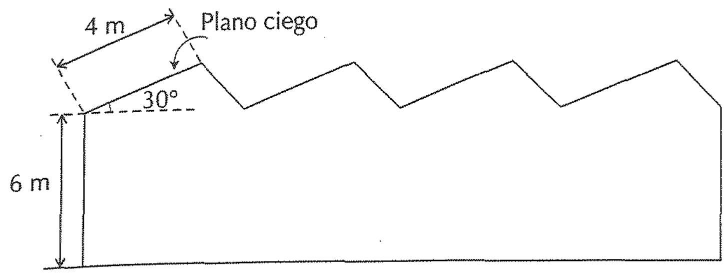
c) Es mediatriz del segmento cuyos extremos son los puntos de coordenadas (1,2) y (3,6).

2.2.1 Ingeniería y planos

SITUACIÓN INICIAL 1:

El techo de una fábrica, como la que muestra la figura 2-38, tiene la configuración denominada "diente de sierra". Usualmente, uno de los faldones de este techo es un plano ciego, con cubierta de chapa o una losa de hormigón armado, y el otro faldón es un plano vidriado que permite el ingreso de luz al interior.

Figura 2-38



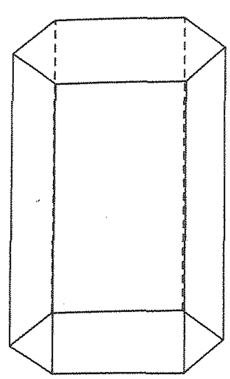
La intersección de ambos planos es una recta, que se denomina cumbrera, y constructivamente debe ser tal que impida el ingreso de agua en ese encuentro, habitualmente crítico entre dos tipos de material.

Con los datos provistos en la figura 2-38, ¿puede el lector obtener la ecuación del plano que materializa el primer faldón ciego?

SITUACIÓN INICIAL 2:

Un cristal puede tener formas geométricas regulares, por ejemplo, un cristal de cuarzo, que pueden adoptar la forma de un prisma de sección hexagonal, como se muestra en la figura 2-39. Las caras de este cristal son planos con orientaciones diferentes. Los cristales de cuarzo tienen propiedades piezoeléctricas, es decir, mediante una presión de tipo mecánico es posible inducir en sus caras la aparición de cargas eléctricas. El que las fuerzas sean de tensión o de compresión provoca variaciones en el signo de la carga generada.

Figura 2-39



¿Es posible realizar el proceso inverso, es decir, aplicando un campo magnético se genera un efecto mecánico? Por cierto, sí. El efecto mecánico se produce en la emisión de vibraciones, coincidiendo con una frecuencia llamada resonancia (que depende de la forma y las dimensiones del cristal), las cuales son ondas sonoras de elevadas frecuencias y se denominan ultrasonidos.

Considere el cristal de la figura 2-39. ¿Puede calcular el ángulo que forman dos caras, planos, contiguas? ¿Es ese ángulo el mismo para todas las caras? Las bases del cristal están contenidas en planos paralelos. ¿Hay alguna correlación entre los ángulos de los segmentos que conforman la sección de cada base con el ángulo entre caras?

El Plano

10.- Hallar las ecuaciones general, segmentaria y normal de los planos, conociendo el vector normal y un punto.

a) $\vec{n} = (4,3,2)$ y P(5,1,3)

b) $\vec{n} = (-1,2,1)$ y P(-2,6-1)

c) $\vec{n} = (5,3,0)$ y P(1,2,3,)

d) $\vec{n} = (3,1,2)$ y P(-1,2,-2)

11.- Hallar la ecuación general del plano dado un punto que le pertenece y dos vectores paralelos a dicho plano.

a) $\vec{q}=(3,-1,5)$; $\vec{p}=(1,3,2)$ y P(2,1,1)
b) $\vec{q}=(2,0,1)$; $\vec{p}=(4,2,4)$ y P(3,4,2)
c) $\vec{q}=(5,2,5)$; $\vec{p}=(-1,2,3)$ y P(0,0,0)
d) $\vec{q}=(9,-5,7)$; $\vec{p}=(-1,3,6)$ y P(3,1,5)

12.- Hallar la ecuación general del plano dados tres puntos.

a) $P_1(2,1,1)$ $P_2(3,2,-1)$ y $P_3(1,4,5)$
b) $P_1(1,2,3)$ $P_2(3,2,1)$ y $P_3(2,1,3)$
c) $P_1(5,2,3)$ $P_2(0,0,0)$ y $P_3(4,1,3)$
d) $P_1(-5,2,-1)$ $P_2(4,1,8)$ y $P_3(-9,3,4)$

13.- Hallar la ecuación del plano:
a) Paralelo a $2x+3y+4z-12=0$ y que pasa por el origen de coordenadas.
b) Paralelo al plano xy y que pasa dos unidades por debajo del mismo.
c) Perpendicular al eje z, que pase por el punto *(2,3,6)*.
d) Paralelo al plano yz, que pase dos unidades detrás del mismo.
e) Que corta a los ejes en los puntos *(-2,0,0); (0,3,0) y (0,0,5)*.
f) Que pasa por el punto *(-1,2,4)* y es paralelo al plano $2x-3y-5z+6=0$.
g) Que es perpendicular en el punto medio al segmento que une los puntos *(-2,2,-3)* y *(6,4,5)*.

14.- Reducir la ecuación del plano $2x-2y+z-12=0$ a la forma normal, dando los cosenos directores y la longitud de la normal (distancia del plano al origen de coordenadas).

15.- Hallar la distancia entre punto y plano de:
a) *P(2,-2,3)* y el plano $2x+y-2z-12=0$.
b) *P(7,3,4)* y el plano $6x-3y+2z-13=0$.
c**)** *P(1,0,4)* y el plano $x+y-2z+5=0$.
d**)** *P(5,1,3)* y el plano $2x+4y-5z+1=0$. (Justifique el resultado)

16.- Hallar el ángulo agudo que forman los planos:
a) $2x-y+z=7$ y $x+y+2z-11=0$.
b) $x-8y+6z-1=0$ y $x-8y+6z+10=0$.
c) $2x-3y-6z-14=0$ y $2x-3y-6z+7=0$.

17.- Hallar la distancia entre los planos:
a) $x-8y+6z-1=0$ y $x-8y+6z+10=0$.
b) $2x-3y-6z-14=0$ y $2x-3y-6z+7=0$.
c) $3x-2y+z-4=0$ y $6x-4y+2z-8=0$. (Justifique el resultado)
d) $x+y+z+2+4=0$ y $x-2y+3z-8=0$ (que observa en este punto?).

18.- Hallar el valor de w para que los siguientes planos sean paralelos.
a) $2x-y+z=7$ y $wx-2y+2z-11=0$.

b) $5x-8y+6z-1=0$ y $wx-4y+3z+10=0$.

c) $2x+y-z-2=0$ y $wx+y+z+5=0$. (Verifique la respuesta y Justifique)

2.3.1 Ingeniería y rectas en el espacio

Situación inicial 1:

En el plano, un par de rectas tiene tres alternativas posibles en lo que se refiere a su posición relativa. Es decir, las rectas pueden ser concurrentes (que se cortan en un punto); paralelas (no tienen ningún punto común), o coincidentes (los puntos de una recta coinciden con los de la otra; se trata en definitiva de la misma recta).

En el espacio, existe una cuarta posibilidad: que las rectas sean alabeadas.

¿Qué significado tiene que dos rectas sean alabeadas? De nuevo, en la vida diaria siempre nos encontramos con ejemplos de rectas alabeadas, sólo que tal vez no sabemos que lo son. Por ejemplo, imaginemos que conducimos por una autopista recta. Una autopista tiene la particularidad de que ningún cruce transversal se produce a nivel, de lo contrario, dejaría de ser autopista (los especialistas en vías de comunicación las denominarían en tal caso autovías). Si conducimos por una autopista, podremos observar que todos los cruces transversales se realizan en diferentes niveles, dejando una altura mínima sobre la autopista que se llama "gálibo". El gálibo está determinado por la Dirección Nacional de Vialidad para permitir el paso de ciertos vehículos típicos con altura estándar prefijada.

Figura 2-72

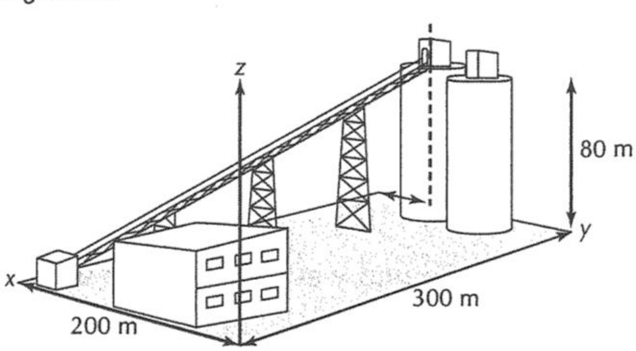
Puede observarse que esos cruces transversales son también rectas, que no tienen ningún punto de contacto con la recta que materializa la autopista, pero con una dirección diferente (en el caso que nos ocupa, suelen ser direcciones perpendiculares). La autopista y los cruces transversales son ejemplos de rectas alabeadas.

Investigar las medidas de gálibo que determina la Dirección Nacional de Vialidad para permitir el paso de los vehículos de diseño por las carreteras.

Situación inicial 2:

Posiblemente hayamos escuchado hablar alguna vez acerca de los elevadores de granos. A lo largo de la margen derecha del Paraná, en la costa de la Provincia de Santa Fe y de la de Buenos Aires, se suceden estas plantas de almacenamiento de granos y subproductos agrícolas destinados a la exportación.

Figura 2-73



En la figura se observa un detalle esquemático y elemental de una de estas construcciones. Podemos imaginar que en la parte delantera del dibujo se encuentran las instalaciones donde los camiones y vagones ferroviarios vuelcan el grano, el cual es elevado mediante una banda transportadora hasta los silos verticales ubicados en la parte posterior. En dichos silos se almacena el grano en espera del arribo de los buques que los van a transportar a su destino.

Suponga que el cereal que se está elevando es maíz, el cual tiene un ángulo de talud natural de 23°. ¿Qué interpretación se le puede dar a este valor? Si la banda con la cual se efectúa el transporte subtiende un ángulo mayor de 23° con la horizontal, se dan las condiciones para que el grano comience a rodar en sentido opuesto al cual se pretende movilizarlo.

Con las medidas de la figura 2-73, ¿puede calcularse la pendiente de la recta que materializa la banda transportadora? ¿Y el ángulo que ésta subtiende con la superficie del terreno? ¿Es posible transportar el maíz con esta banda sin que los granos rueden hacia atrás? ¿Cuánto se puede acortar la cinta hasta alcanzar ese ángulo de equilibrio, manteniendo constante la altura de los silos?

Tenga en cuenta el sistema de referencia local que es consistente con las dimensiones que aparecen en la figura 2-73 y obtenga, con respecto al mismo, la ecuación de la recta que materializa la banda.

La recta en el espacio tridimensional

19.- Dadas las siguientes rectas, hallar el vector director y un punto.

a) $\begin{cases} 3x+y-z-8=0 \\ 4x-7y-3z+1=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x-2y+z+3=0 \\ 2x+5y-4z+1=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ 2x-5y+3z+2=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -3x+y+4z=0 \\ 2x+2y+z-3=0 \end{cases}$

20.- Escribir las ecuaciones Vectoriales, Paramétricas y cartesianas simétricas de las rectas:

a) $\begin{cases} 3x+y-z-8=0 \\ 4x-7y-3z+1=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x-2y+z+3=0 \\ 2x+5y-4z+1=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ 2x-5y+3z+2=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -3x+y+4z=0 \\ 2x+2y+z-3=0 \end{cases}$

21.- Escribir las ecuaciones cartesianas simétricas de las rectas que pasan por los puntos:

a) *(1,2,3)* y *(-1,-2,4).*

c) *(4,2,3)* y *(1,3,-4).*

b) *(5,2,1)* y *(2,5,-4).*

d) *(3,2,1)* y *(4,3,2).*

22.- Hallar los puntos de intersección con los planos coordenados de las rectas:

a) $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x+y+2z=7 \end{cases}$

b) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-6}{-1}$

23.- Hallar el ángulo formado por las rectas:

a) $\begin{cases} x-2y+z-2=0 \\ 2y-z-1=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x-2y+z-2=0 \\ x-2y+2z-4=0 \end{cases}$

b) $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-4}{6}$ y $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-3}{6}=\dfrac{z+4}{-2}$

c) $\begin{cases} 2x+2y+z-4=0 \\ x-3y+2z=0 \end{cases}$ y $\dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y+2}{6}=\dfrac{z-4}{-2}$

24.- Hallar el ángulo que forma la recta que pasa por *(3,4,2)* y *(2,3,-1)* con la que une los puntos *(1,-2,3)* y *(-2,-3,1)*.

25.- Hallar el ángulo formado por la recta $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{6}=\dfrac{z-3}{-6}$ y el plano $2x-2y+z-3=0$.

26.- Hallar el punto de intersección de la recta y el plano del ejercicio anterior.

27.- Verificar que la recta $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{4}$ es paralela el plano $6x+7y-5z-8=0$.

28.- Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto *(2,1,-2)* y es perpendicular al plano $3x-5y+2z+4=0$.

29.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto *(1,4,-2)* y es paralela a la recta:

r = $\begin{cases} 3x+y-z-8=0 \\ 4x-7y-3z+1=0 \end{cases}$

30.- En los siguientes pares de rectas, decidir si las mismas son coincidentes o paralelas:

a) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-2}{4}$ y $\dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y-1}{-6}=\dfrac{z+2}{-8}$

b) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-2}{4}$ y $\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y+\frac{1}{2}}{-6}=\dfrac{z-4}{-8}$

31.- Demostrar que la recta $\begin{cases} y-2x+5=0 \\ z-3x-4=0 \end{cases}$ esta situada en el plano $9x+3y-5z+35=0$.

32.- En los siguientes pares de rectas, decidir si se cortan en un punto o son alabeadas. Si se cortan, obtener las coordenadas del punto de intersección; si son alabeadas, calcular las distancia entre ellas.

a) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{6}$ y $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{5}$

b) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{6}$ y $x=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{5}$

Las situaciones de ingeniería fueron extraídas del libro Nociones de Geometría Analítica y Algebra Lineal (Ana Maria Kozak, Sonia Pompella Pastorelli,Pedro Emilio Vardanega