Espacios vectoriales

Ingeniería y vectores

SITUACIÓN INICIAL 1:

La salida de una fuente de información es una secuencia de dígitos binarios: 0 y 1. En la codificación de bloque, esta secuencia de información binaria es segmentada en bloques de mensaje de longitud finita; cada bloque de mensaje, llamado u, consiste en k dígitos de información que se forman con ordenamientos de ceros y unos.

Por ejemplo:

Si los mensajes u son de un dígito, tendremos dos (posibles) mensajes distintos: $\{0; 1\}$.

Si los mensajes u son de dos dígitos, tendremos cuatro mensajes (posibles) distintos: $\{00; 01; 10; 11\}$.

Si los mensajes u son de tres dígitos, tendremos en total ocho mensajes (posibles) distintos: $\{000; 100; 010; 001; 110; 101; 011; 111\}$

En general, si el mensaje u tiene k dígitos, tendremos 2^k posibles mensajes.

Un codificador traduce cada mensaje en un vector de n componentes llamado palabra código, y el conjunto de palabras código se denomina código de bloque.

Para que un código de bloque sea útil debe haber una correspondencia uno a uno entre un mensaje y su palabra código. ¿Por qué?

Pero *¿qué es un código lineal de bloque?*

Un código de bloque de longitud n y 2^k palabras código se llama código lineal $(n; k)$ si, y sólo si, sus 2^k palabras código forman un subespacio k-dimensional del espacio vectorial $(F_n; +; F; \cdot)$ con $n \in \mathbb{N}$.

Donde las operaciones suma de vectores y producto por un escalar en F_n son:

$$(a_1; a_2; \cdots; a_n) + (b_1; b_2; \cdots; b_n) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; \cdots; a_n + b_n)$$
$$\alpha(a_1; a_2; \cdots; a_n) = (\alpha a_1; \alpha a_2; \cdots; \alpha a_n)$$

siendo a_k, b_k y α únicamente los valores del conjunto $F = \{0; 1\}$ que se efectúan como está descrito en las siguientes tablas:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabla 1: Suma

•	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabla 2: Producto

¿Cómo leemos las tablas de suma y producto?

Av. 60 esq. 124 Tel. (0221) 4217578 – 4823155 – La Plata (1900)
www.frlp.utn.edu.ar/materias/algebra

En la tabla 1: Suma, las flechas nos muestran el sentido de la lectura; de esta forma tenemos, por ejemplo, que la operación $1 + 0 = 1$.

De manera análoga, leyendo la tabla 2: Producto, resulta por ejemplo que $1 \cdot 0 = 0$.

A partir de la lectura del presente capítulo será posible que el lector demuestre que el conjunto de palabras código:

$F_3 = \{000;\ 100;\ 010;\ 001;\ 110;\ 101;\ 011;\ 111\}$ es un subespacio vectorial de $(F_n; +; F; \cdot)$ con $n \in \mathbb{N}$.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 2:
Consideremos el sistema de masa-resorte mostrado en la figura 8-1.

Figura 8-1

Si el cuerpo de masa m se desplaza con respecto a la posición de reposo y luego se suelta o comprime el resorte, lo que resulta es un movimiento oscilatorio. Si esto se hace en ausencia de fuerzas externas ignorando la fricción, el desplazamiento $f(t)$ del cuerpo, con respecto a la posición de reposo, está dado por la función $f(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega t)$ con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ siendo k la constante del resorte, y las constantes C_1 y C_2 pueden determinarse si se conoce la posición y la velocidad iniciales (incluyendo dirección) del cuerpo.

Desde el punto de vista algebraico, el conjunto de las funciones que representan al sistema físico señalado puede definirse como:

$$V = \{f(t) \,/\, f(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega t) \wedge C_1 \in \mathbb{R} \wedge C_2 \in \mathbb{R}\}$$

Con base en la lectura del presente capítulo el lector podrá comprobar el conjunto V, junto a las definiciones usuales de suma de funciones y de producto de una función por un número real es un subespacio vectorial de $(F(\mathbb{R}); +; \mathbb{R}; \cdot)$.

Demostrar que una base de V es $\{\cos(\omega t); \operatorname{sen}(\omega t)\}$. ¿Cuál es la dimensión de V?

Las situaciones de ingeniería fueron extraídas del libro Nociones de Geometría Analítica y Algebra Lineal (Ana Maria Kozak, Sonia Pompella Pastorelli,Pedro Emilio Vardanega)

Nota Importante: En los parciales asociados a la aprobación directa, el alumno deberá ser capaz de reproducir las demostraciones, las deducciones y los desarrollos vistos en teoría o existentes en la bibliografía recomendada a tal fin por la cátedra.

Desarrollo Temático de la Unidad

Leyes de composición Interna y externa. Propiedades. Definición de espacio vectorial. Subespacios. Combinaciones lineales. Dependencia e independencia lineal. Sistema de generadores. Base y dimensión de un espacio vectorial. Cambio de base. Bases ortogonales y ortonormales. Proceso de ortonormalización de bases de Gram-Schmidt. Interpretación geométrica del proceso.

Ejercitación a desarrollar en el aula:

Se deberá desarrollar en el **aula** los **ejercicios 1a, 1b, 1f, 2, 3, 4, 6, 8a, 8c, 8h, 9a, 9e, 9h, 11, 13a, 13c**. Los demás ejercicios deben ser realizados por los alumnos.

1.- Escribir en forma explícita:

a- El inverso aditivo de *(1,-2,3,-4)*.
b- El vector suma de *(1,1,1)* con *(2,3,3)*.
c- El vector suma de *(2,3,4,5)* con el inverso aditivo de *(1,3,5,6)*.
d- El inverso aditivo de cuatro veces el vector *(1,3,-6)*.
e- El vector *(2,1,0,0) – (2,1,1,1)* multiplicado por el escalar *–2*.
f- El vector de R_4 que sumado al vector *(3,2,0,0)* da como resultado el vector *(1,1,2,1)*.
g- El vector de R_3 que sumado con el inverso aditivo del vector *(1,-4-6)* da como resultado el vector *(3,4,2)*.

2.- El conjunto *W = {(x,y)* ε *R/|x.y=0}* ¿Es un subespacio de R2?

3.- Expresar, de ser posible, el vector *(7;5)* como **combinación lineal** de los vectores *(2;1)* y *(1;1)*. Representar gráficamente.

4.- Expresar, de ser posible, a $\vec{v}=(5;2)$ como **combinación lineal** de $\vec{v_1}=(2;4)$ y $\overrightarrow{v2}=(-\frac{1}{2};-1)$. Representar gráficamente y analizar la situación.

5.- Expresar a $\vec{v}=(3;4)$ como **combinación lineal** de $\vec{v_1}=(2;1)$ y $\overrightarrow{v2}=(1;2)$.

6.- Expresar el vector *(1,1,0)* como **combinación lineal** de *(1,2,3); (-1,-1,2) y (1,3,8)*.

7.- a) ¿Se puede escribir a $\vec{v}=(-2;0;1)$ como c.l. de $\vec{v_1}=(4;0;2)$, $\vec{v_2}=(0;-1;-3)$ y $\vec{v_3}=(4;2;8)$?. Justificar la respuesta.

b) ¿Para qué valores de k el vector (-5,2,3) puede escribirse como combinación lineal de los vectores *(1,0,0),(0,1,0),(0,2,k)*?

8.- Determinar y justificar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes (l.i.) o linealmente dependientes (l.d.).

a- $\{(2;4;1),(8;16;4)\}$
b- $\{(1,2)\}$
c- $\{(3;2;1), (1;0;0), (-4;5;-2)\}$.
d- $\{(1;1;9), (2;1;3), (2;2;3), (3;-3;7)\}$.
e- $\{(0;0;0),(3;1;-3)\}$
f- $\{(-1;2;4;0),(-4;8,16,0)\}$
g- $\{(1;2;3;4), (0;2;3;4),(0;0;3;4),(0;0;0;4)\}$
h- $\{(2;1),(1;3),(2;2)\}$

9.- Analizar y justificar si los siguientes conjuntos de vectores constituyen base en los espacios correspondientes.

a- $\{(1;2), (2;1)\}$
b- $\{(1;2;1), (2;3;4)\}$
c- $\{(1,1,1); (0,5,2); (0,0,1)\}$.
d- $\{(3;4;3), (1;1;1), (2;2;2)\}$.
e- $\{(1,-1,3); (0,0,0); (2,3,5)\}$.
f- $\{(1,0,0,0); (1,1,0,0); (1,1,1,0); (1,1,1,1)\}$.
g- $\{(2,5,4); (1,3,2); (2;6;4)\}$.
h- $\{(3,2,2); (2,4,4); (4,3,2); (1,1,5)\}$

10.- Verificar que $\{(1,1,1); (1,1,0); (1,0,0)\}$ es una base de R_3 y escribir el vector $(3,4,5)$ en términos de esta base.

11.- El vector (3,4) corresponde a la base canónica $\{(\breve{i},\breve{j})\}$; expresarlo en base $B=\{(1,2);(2,1)\}$.

12.- Las componentes de un vector referido a la base $\{(1,2);(2,1)\}$ son $\frac{5}{3}$ y $\frac{2}{3}$. Expresarlo en base $\{(2,3);(3,2)\}$.

13- Ortonormalizar las siguientes bases:

a) $\{(-6;0), (2;3)\}$.
b) $\{(1;5), (-5;1)\}$.
c) $\{(1;1;0), (0;1;1),(1;0;1)\}$.
d) $\{(1,2,1); (0,-1,2); (2,0,-1)\}$.