ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Trabajo Práctico Nº 7

Matrices y Determinantes

2019

Matrices

Situación inicial 1:

Una empresa califica el estado de trabajo de sus máquinas de la siguiente manera:

Estado 1 (E_1): funcionamiento normal.
Estado 2 (E_2): con pequeños desperfectos que no afectan su utilización.
Estado 3 (E_3): con desperfectos que afectan el uso normal.
Estado 4 (E_4): descompuesta (sin funcionar).

Cada semana, una máquina tiene las siguientes probabilidades de cambiar de estado:

Si se encuentra en el estado E_1, tiene 30% de probabilidad de pasar a E_2, 15% a E_3, y 5% a E_4.
Si se encuentra en el estado E_2, tiene 30% de probabilidad de pasar a E_1, 25% a E_3, y 15% a E_4.
Si se encuentra en el estado E_3, tiene 20% de probabilidad de pasar a E_1, 25% a E_2, y 25% a E_4.
Si se encuentra en el estado E_4, tiene 10% de probabilidad de pasar a E_1, 30% a E_2, y 35% a E_3.

a) Encontrar la probabilidad de que una máquina ubicada en E_1 pase a E_4 luego de 6 semanas.

b) Analizar el estado de las máquinas luego de 4 semanas si, inicialmente, 50% funciona de modo normal, 20% tiene pequeños desperfectos, otro 20% tiene averías importantes, y las máquinas restantes están descompuestas.

c) Usar un sistema algebraico de cómputo para encontrar la probabilidad de que, teniendo una máquina pequeños desperfectos, llegue a estar inutilizable al cabo de un año.

d) Si las probabilidades de transición de estado no cambian, ¿se puede predecir el porcentaje de máquinas ubicadas en cada estado?

Nota Importante: En los parciales asociados a la aprobación directa, el alumno deberá ser capaz de reproducir las demostraciones, las deducciones y los desarrollos vistos en teoría o existentes en la bibliografía recomendada a tal fin por la cátedra.

Ejercitación a desarrollar en el aula:

Los **ejercicios 1, 3, 5, 6, 8, 10, 13, 15, 16, 20, 22, 24.** Los demás ejercicios deben ser realizados por los alumnos.

1.- Escribir la matriz A que cumpla con las siguientes características: A_{2x3} y $a_{i,j} = 3i - j$

2.- Armar la matriz A que cumpla con A_{4x4} y $a_{i,j} = i + j$

3.- Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) ¿Es posible calcular A+B y C+A?. En caso de ser posible, confeccionar la operación.

b) ¿Qué condicion deberán verificar ambas matrices para poder calcular su adición?.

4.- Dadas las matrices del ejercicio anterior

a) ¿Es posible calcular BxA y AxB? En caso de ser posible, confeccionar la operación.

b) ¿Qué condición deberán verificar las matrices para poder calcular su producto?

5.- Efectuar los productos AxB y BxA para las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

¿Cumple la propiedad conmutativa?

6.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Resolver:

a) $A + A^t$. Sacar conclusiones

b) $A - A^t$. Sacar conclusiones

c) Expresar a A como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

7.- Un alumno contabiliza las horas semanales que dedica a clases, estudio y deporte, de acuerdo con la siguiente tabla:

	Clases	Estudio	Televisión	Deportes
Lunes	6	2	1	2
Martes	5	3	2	1
Miércoles	8	1	0	2
Jueves	6	1	2	1
Viernes	5	4	0	4
Sábado	1	2	3	6
Domingo	0	2	4	6

Y valora cada hora dedicada a las distintas actividades del siguiente modo: Clases: 2 puntos; Estudio: 3 puntos; Televisión: 1 punto; Deporte: 4 puntos. Su padre, hace una valoración distinta: 4; 4; 0;2 puntos respectivamente. ¿Cuál es el día cuyas actividades valora más el alumno y cual valora más el padre?

8.- Los consumos anuales de cuatro familias A, B, C y D en pan, carne y leche están reflejados en la primera tabla, mientras que los precios de esos productos en los años 2010, 2011, 2012 y 2013 están reflejados en la siguiente. Calcular el gasto total de cada familia en los cuatro años y los gastos de todas las familias en cada año.

	Pan	Carne	Leche
A	420	160	200
B	325	128	180
C	405	142	195
D	425	170	210

	2010	2011	2012	2013
Pan	10	15	21	25
Carne	40	45	50	60
Leche	9	11	12	14

9.- Las matrices M y N que describen todos los viajes entre las ciudades A_i y B_i; B_i y C_i respectivamente, se presentan mediante las siguientes tablas

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	0	2	0
A_2	0	1	1	1
A_3	0	0	0	1

	C_1	C_1
B_1	3	2
B_2	1	0
B_3	1	0
B_4	0	2

a) Construir un diagrama de Venn que represente gráficamente todos los viajes posibles.
b) Construir un grafo o diagrama sagital, colocando sobre la fecha el número posible de viajes
c) Realizar la operación matricial que permita identificar el número de viajes posibles entre cada una de las ciudades indicadas con A y cada una de las ciudades identificadas con C.
d) La matriz resultante de la operación realizada en c) tiene un cero en la posición a_{31}; ¿qué significa que desde el punto de vista de la posibilidad de viajar?
e) ¿Qué indica el valor obtenido en la posición a_{21}?

10.- Calcular x, y, z, t para que se verifique:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

11.- Para las matrices
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ verificar que se cumple:

a) $A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C$
b) $A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C$
c) $(A + B) \bullet C = A \bullet C + B \bullet C$

12.- Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ encontrar la matriz X que cumpla con 3X-2A = 5B

13.- Encontrar las matrices A y B de dimensión 2 que verifiquen:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

14.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales, en el cual las incógnitas son matrices:

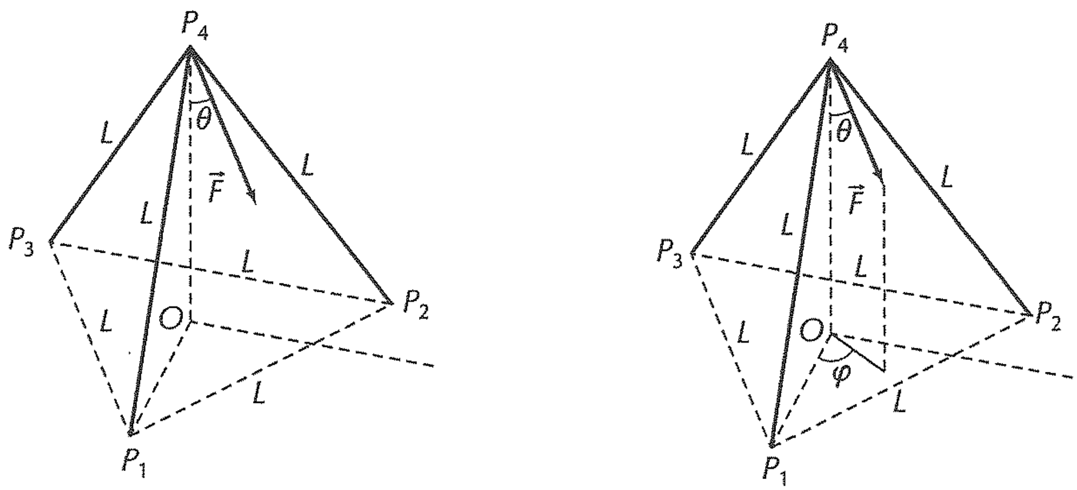
$$\begin{cases} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Determinantes

Cálculo y propiedades

Situación inicial 1:

Figura 7-1



En la figura 7-1 se muestra una estructura formada por tres barras, las cuales descomponen y transmiten al suelo una fuerza variable $\vec{F}$. Los puntos están ubicados, con respecto a un sistema de referencia con origen en O, en: $P_1 = (2;0;0)$; $P_2 = \left(-1;\sqrt{3};0\right)$; $P_3 = \left(-1;-\sqrt{3};\ 0\right)$ y $P_4 = (0;0;0)$. Las longitudes de las tres barras son iguales entre sí e iguales a la distancia que hay entre sus puntos de apoyo; esto es, forman un tetraedro regular.

a) Mostrar que sea cual sea la fuerza, su descomposición es única en las tres direcciones.

b) Determinar los distintos estados de cargas para una fuerza $\vec{F}$, de módulo F, que forma un ángulo θ; $0 \le \theta \le \pi/2$; con la vertical y con un eje horizontal φ.

c) Considerando $\varphi = \pi/2$, determinar el máximo ángulo θ para el cual todas las fuerzas sobre las barras apuntan al suelo.

15.- Resolver el determinante asociado a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

a) Por Sarrus
b) Desarrollando la primera fila
c) Desarrollando por la segunda columna
d) Reduciéndolo previamente a orden 2

16.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ Calcular sin desarrollar:

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

17.- Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

a) Desarrollando por columna 2.
b) Reduciéndolo previamente a orden 2.

18.- Calcular $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & 7 & 4 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

19.- Dado el valor del primer determinante indicar, sin realizar el desarrollo el valor del segundo determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & p & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25; \qquad \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2p & 2p & 2r \\ 2u & 2v & 2w \end{vmatrix} = ?$$

20.- Si el determinante de una matriz cuadrada de orden 3 vale 2 ¿Cuál es el valor del determinante de la matriz que se obtiene multiplicando la matriz original por 5?

21.- Hallar la matriz adjunta de: a) $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

22.- Obtener la matriz inversa de

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

a) Utilizando la matriz de los adjuntos
b) Por medio de operaciones elementales de fila

23.- Calcular la matriz inversa en los casos en que resulte posible:

a) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 5 & 0 & 2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

24.- Dada la siguiente matriz cuadrada de orden tres $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ realizar las siguientes operaciones: F_{12}; $3F_1$; F_1-2F_2

25.- Sumar las matrices $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ y premultiplicar la matriz resultante por las matrices $D=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $E=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $F=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Obtener conclusiones por comparación con los resultados del ejercicio anterior.

26.- Calcular el rango de las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 5\\ 1 & 10 & 8\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

a) Utilizando el orden de los determinantes asociados
b) Por medio de transformaciones elementales

Las situaciones de ingeniería fueron extraídas del libro Nociones de Geometría Analítica y Algebra Lineal (Ana Maria Kozak, Sonia Pompella Pastorelli,Pedro Emilio Vardanega)