Ingeniería y sistemas de ecuaciones lineales

SITUACIÓN INICIAL 1:

Análisis de redes

Muchas situaciones prácticas dan origen a la estructura de red: redes de transporte, redes de comunicaciones, redes económicas, entre otras.

De particular interés son los flujos posibles a través de las redes. Por ejemplo, es interesante analizar el flujo de vehículos a través de una red de calles, el flujo de información a través de una red de comunicaciones, etcétera.

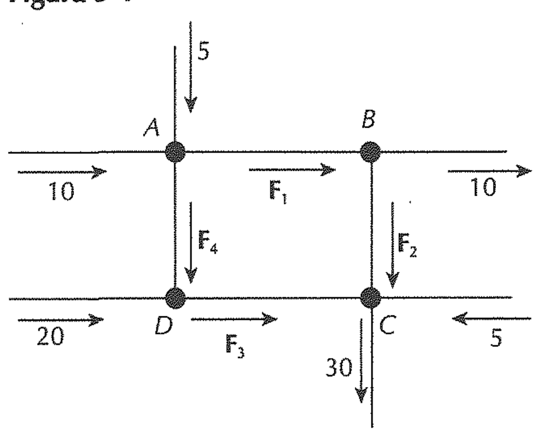
Una red se puede componer de un número finito de nodos o vértices conectados por líneas que se denominan ramas o arcos, y donde cada una de estas ramas está vinculada con un flujo que representa la cantidad de algún producto que puede fluir a lo largo de esa rama en una dirección indicada. Por ejemplo, la cantidad de autos que se desplazan en una red de calles de un solo sentido.

La regla fundamental que rige el flujo a través de una red se denomina conservación del flujo, y establece que "en cada nodo, el flujo que entra es igual al flujo que sale".

En la figura 5-1 se muestra una red simplificada de tuberías de agua, y el flujo indicado en cada rama es medido en litros por minuto.

Se desea construir el modelo matemático que exprese los flujos posibles a través de la red de tuberías de la figura 5-1. Su resolución permitirá determinar los valores de flujo máximo y mínimo en cada rama.

Figura 5-1

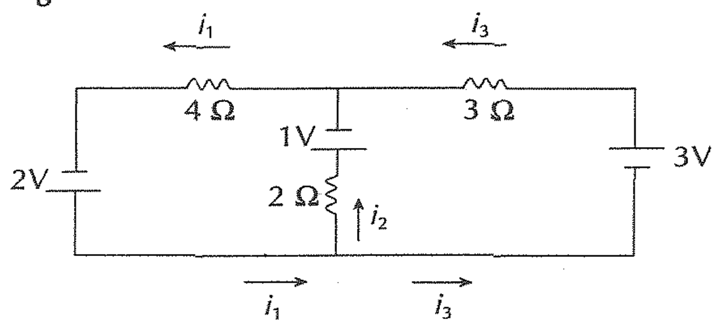


SITUACIÓN INICIAL 2:

Análisis de circuitos eléctricos

Los circuitos eléctricos generalmente cuentan con baterías de fuerzas electromotrices y resistencias, ambas de valores conocidos. A menudo el problema consiste en determinar las corrientes eléctricas que circulan en cada parte del circuito.

Figura 5-2



Las reglas de Kirchoff ayudan a resolver el problema. Estas reglas son dos: regla de las mallas y regla de los nudos.

La regla de las mallas establece que la suma de las diferencias de potencial encontradas en el recorrido de cualquier camino cerrado (malla) de un circuito es igual a cero: $\sum V = 0$

La regla de los nudos establece que la suma de las corrientes que llegan a un nudo (punto donde confluyen más de dos conductores) es igual a la suma de las corrientes que salen del nudo: $\sum i_{entrantes} - \sum i_{salientes} = 0$

Para resolver el problema se suponen las corrientes, asignándoles un sentido (si el resultado es negativo será porque la corriente resultó opuesta al sentido tomado).

Además, al pasar por una resistencia se registra una caída de potencial igual a $\Delta V = -iR$ (negativo), y las fuentes aportan cierto potencial si la corriente las atraviesa.

¿Cuáles son las corrientes del circuito graficado?

Las situaciones de ingeniería fueron extraídas del libro Nociones de Geometría Analítica y Algebra Lineal (Ana Maria Kozak, Sonia Pompella Pastorelli,Pedro Emilio Vardanega)

<u>Desarrollo Temático de la Unidad</u>

Notación matricial de un sistema de ecuaciones lineales. Obtención de la solución por inversión de matrices. Teorema o Regla de Cramer. Método de eliminación de Gauss. Método de Gauss-Jordan. Sistemas lineales de orden cualquiera. Sistemas homogéneos. Análisis de compatibilidad. Teorema de Rouché-Frobenius; su demostración. Resolución aproximada de sistemas incompatibles por cuadrados mínimos. La matriz pseudoinversa.

Ejercitación a desarrollar en el aula:

Se deberá desarrollar en el aula los **ejercicios 1a, 1c, 2a, 2b, 2e, 4, 5a y 7.** Los demás ejercicios deben ser realizados por los alumnos.

1. Resolver por el método de inversión de matrices los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. (Analizar previamente si es posible su aplicación).

a. $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 4x - 3y = -11 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 4x - y + 5z = -1 \\ 2y + z = 5 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x - 2y + z - 2w = 1 \\ 2x + y - 4w = 0 \\ -x + 5z + 2w = 1 \\ 3x - 6w = 2 \end{cases}$

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales mediante métodos distintos (Cramer, Eliminación Gaussiana , Gauss-Jordan o pseudoinversa). Clasificar los sistemas.

a) $\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 3x + z = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4y - 3z = 5 \\ 4x - y + z = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y - z = 3 \\ x + y - 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y - z = 3 \\ x + y - 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 4y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x - y - z + w = 3 \\ x + y - 3z - w = 4 \\ 2x + y - z - 3w = 3 \end{cases}$

Observación: En caso de que el sistema sea Compatible Indeterminado, escribir su solución general

3.- Analizar mediante el teorema de Rouché-Frobenius los ejercicios 2b, 2c y 2e.

4.- Ajustar el siguiente sistema incompatible usando matriz pseudoinversa. Interpretar el resultado y representar gráficamente $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$

5.- Resolver y analizar por Rouché-Frobenius los siguientes sistemas homogéneos:

a. $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y-4z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x-5y+z=0 \\ 6z+4x-2y=0 \end{cases}$

6.- Un médico asigna a una de sus pacientes un complemento vitamínico compuesto por tres tipos de alimentos. El alimento I, cada 100 gr, contiene una unidad de vitamina A, tres unidades de vitamina B y cuatro unidades de vitamina C. El alimento II, cada 100 gr, contiene dos unidades de vitamina A, tres unidades de vitamina B y cinco unidades de vitamina C y el alimento III, cada 200 gr, contiene tres unidades de vitamina A, tres unidades de vitamina B y ninguna de vitamina C. Si necesitamos 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B y 20 de vitamina C diarias, ¿Qué cantidad de cada uno de los alimentos deberíamos ingerir?.

7.- Ajustar el sistema incompatible usando el método de mínimos cuadrados.

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+y=4 \\ 2x+y=3 \end{cases}$$