ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
Trabajo Práctico Nº 9
Cónicas
Año 2019

Ingeniería y cónicas

Situación inicial 1:

El diseño arquitectónico de un edificio para exposiciones municipales considera al cuerpo como un volumen formado por una cúpula con sección transversal semielíptica, como se muestra en la figura 3-1. La luz del edificio es de 20 m y la profundidad de 48 m.

Los ingenieros consideran adecuado soportar esta cúpula sobre estructuras parabólicas, ubicadas transversalmente cada 6 metros. La estructura de la cúpula se unirá a los arcos parabólicos mediante barras, como se muestra en la figura 3-2. Calcular las longitudes de cada barra.

Figura 3-1

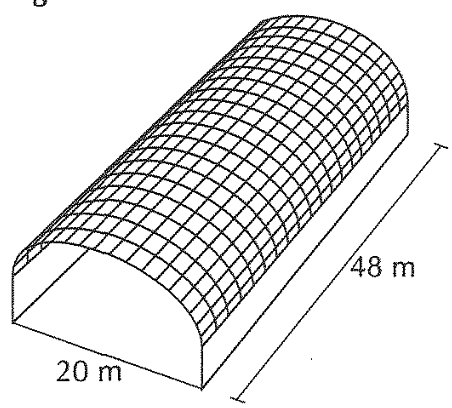
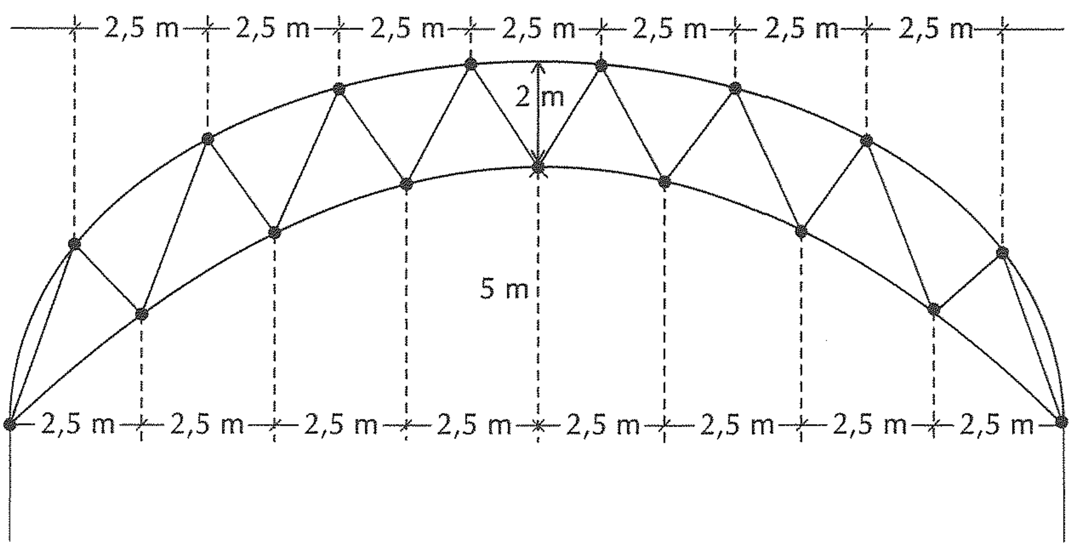


Figura 3-2



Las situaciones de ingeniería fueron extraídas del libro Nociones de Geometría Analítica y Algebra Lineal (Ana Maria Kozak, Sonia Pompella Pastorelli,Pedro Emilio Vardanega)

Nota Importante: En los parciales asociados a la Aprobación Directa, el alumno deberá ser capaz de reproducir las demostraciones, las deducciones y los desarrollos vistos en teoría o existentes en la bibliografía recomendada a tal fin por la catedra.

Ejercitación a desarrollar en el aula:

Se deberá desarrollar en el **aula** los **ejercicios**

Circunferencias: 2, 3, 5, 6.
Parábola: 1a, 1h, 2a, 2f, 2g, 3a.
Elipse: 1a, 1b, 1j, 2.
Hipérbola: 1, 3, 6b, 6c, 8.
Rotación y Traslación: 1a, 1c, 2b, 3.

Los demás ejercicios deben ser realizados por los alumnos.

Circunferencia

1.- Escribir la ecuación de la circunferencia de centro $C(-3,5)$ y radio $r=3$.
2.- Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(3,-1)$ y pasa por el punto $P(2,2)$.
3.- Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos de coordenadas $A(2,3)$ y $B(-4,5)$. Hallar la ecuación de la curva.
4.- Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(2,-4)$ y que es tangente al *eje* y.
5.- Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $(-4,-1)$ y que es tangente a la recta $3x+2y-12=0$.
6.- Hallar la longitud de la circunferencia cuyo ecuación es $25x^2+25y^2-30x-20y-62=0$.
7.- Hallar la ecuación canónica de la circunferencia cuya ecuación general es:
$x^2+y^2-6x+10y+30=0$
8.- Demostrar que las circunferencias $4x^2+4y^2-16x+12y+13=0$ y $12x^2+12y^2-48x+36y+55=0$ son concéntricas.
9.- Hallar las intersecciones de la circunferencia $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ con los *ejes x e y*.

Parábola

1.- Representar gráficamente las siguientes parábolas y hallar: parámetro, coordenadas del vértice, foco, intersección con los ejes, ecuación del eje de simetría y de la directriz:

a) $y^2=8x$ b) $y^2=-2x$ c) $x^2=-4y$

d) $x^2=2(y-2)$ e) $y=2x^2-4x-3$ f) $x=\frac{1}{2}y^2-2$

g) $y^2-4x-4y+8=0$. h) $y=2x^2+4x-16$

2.- Hallar la ecuación cartesiana de las siguientes parábolas.

a) Foco $(3,0)$ directriz: $x=-3$
b) Foco $(0,5)$ directriz: $y+5=0$
c) Foco $(-3,4)$ directriz: $y=6$
d) Foco $(2,-1)$ directriz: $x=8$
e) Foco $(4,2)$ vértice: $(2,2)$
f) Eje focal x; vértice $(1,0)$ y pasa por $A(3,4)$.
g) De ecuación $y = ax^2 + bx$ y pasa por $P_1(-1,2)$ y $P_2(3,4)$.
h) $y^2 - 6x + 6y + 21 = 0$

3.- Hallar la ecuación de las siguientes parábolas.

a.- De eje paralelo al coordenado x, que pase por los puntos $(0,1)$, $(4,5)$ y $(1,3)$.
b.- De eje vertical, que pasa por los puntos $(4,5)$, $(-2,11)$ y $(-4,21)$.

4.- El cable de suspensión de un puente colgante adquiere la forma de un arco de parábola. Los pilares que lo soportan tienen una altura de 60 m y están separados por una distancia de 500 m, quedando el punto más bajo del cable a una altura de 10 m sobre la calzada del puente. Tomando x como eje horizontal que define el puente y como eje y el de simetría de la parábola, hallar la ecuación de ésta; calcular la altura de un punto situado a 80 m del centro del puente. .

Elipse

1.- Representar gráficamente y hallar centro, focos, vértices, excentricidad y ejes de las siguientes elipses:

a) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
b) $2a = 14; 2b = 10; C(0;0)$; eje focal x
c) $2a = 18; 2c = 16; C(0;0)$; eje focal y
d) $9x^2 + 16y^2 = 576$
e) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$
f) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + 2y = -3$
g) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - \dfrac{9}{4}x = \dfrac{5}{9}$
h) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$
i) $\dfrac{(x-4)^2}{16} + \dfrac{(y+1)^2}{25} = 1$
j) $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$
k) $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$
l) $x^2 + 4y^2 - 6x - 40y + 93 = 0$

2.- Hallar la ecuación de la elipse de focos $F_1(2,2)$ y $F_2(6,2)$ que pasa por el origen de coordenadas.

3.- Sabiendo que P es un punto de la elipse, determinar su ecuación canónica si los focos son $F_1\,(2,0)$, $F_2\,(-2,0)$ y el triángulo $F_1 \overset{\Delta}{P} F_2$ tiene 20 unidades de perímetro.

Hipérbola

1.- Representar gráficamente la siguiente hipérbola $\frac{x^2}{125}-\frac{y^2}{100}=1$ e indicar sobre su gráfico los siguientes elementos:

a.- Focos
b.- Eje Focal
c.- Eje transverso, su longitud
d.- Eje no transverso, su longitud
e.- Vértices
f.- Eje real
g.- Eje ideal

2.- El centro de una hipérbola es $O(-2,3)$; su eje focal es paralelo al eje x, las longitudes de los ejes transversos y no transverso valen 4 y 5 respectivamente. Hallar la ecuación.

3.- Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen de coordenadas, un vértice en $(6,0)$ y una de sus asíntotas es la recta $4x-3y=0$; y eje real: *eje x*. Graficarla.

4.- Dada las hipérbolas $9x^2-16y^2-18x-64y-199=0$ y $x^2-4y^2-6x+40y-107=0$. Hallar:

a.- Centro
b.- Vértices
c.- Focos
d.- Asíntotas
e.- Representar gráficamente.

5.- Hallar la ecuación de la hipérbola de focos $(0,\pm 3)$ y de longitud del eje imaginario igual a 2.

6.- Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene por centro el origen de coordenadas y que:

a.- Sus focos son $(\pm 13,0)$ y vértices $(\pm 5,0)$.

b.- Sus vértices con $(\pm 5,0)$ y la excentricidad : $\frac{4}{3}$.

c.- Sus focos son $(\pm 8,0)$ y la excentricidad: 4.

d.- Longitud del eje real: 8 y focos $(\pm 5,0)$.

7.- Hallar analítica y gráficamente la siguiente intersección: $\begin{cases} 5x^2-y^2=3 \\ x^2+2y^2=5 \end{cases}$

8.- Verificar que la hiperbola $9x^2-16y^2=144$ y la elipse $3x^2+4y^2=300$ tienen los mismos focos.

Rotación y Traslación

1.- Hallar la naturaleza de las siguientes cónicas.

a. $3x^2 - 10xy + 3y^2 + x - 32 = 0$

b. $41x^2 - 84xy + 70y^2 - 168 = 0$

c. $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 30x + 40y = 0$

d. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4 = 0$

2.- Clasificar y eliminar los términos rectangulares. Dar los elementos y representar:

a. $x^2 - 4xy - 2y^2 = 5$

b. $xy + x - 2 = 0$

c. $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 1 = 0$

d. $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 8y - 2 = 0$

3.- Sea $x^2 - 2xy + y^2 + x = 0$ la ecuación de un conjunto de puntos de R^2. Realizar la clasificación por género. Justifique que es una cónica irreducible y hallar la ecuación canónica. (Sugerencia: Usar invariantes)